n.V.

OS 24 n.V.

Theilungslehre

oder

Ausführliche Anleitung

jede

Grundfläche auf die zweckmäßigste Art

für die

Benutzung und nach allen Verhältnissen

geometrisch zu theilen.

Nebst einigen andern Beiträgen

zur

praktischen Geometrie.

Von

Ludwig Bleibtreu.

*

Mit 8 Kupfertafeln.

Frankfurt am Main

bei den Gebrüdern Wilmans.

1819.

6 X

135355745

Bibl. Passau

Vorbericht.

Die Theilungsaufgaben, welche man in den Anleitungen zur praktischen Geometrie zerstreut findet, sind zu einem vollständigen Systeme für die Ausübung nicht zureichend und führen meistens auf verwickelte Konstructionen, die auf dem Felde nicht ausführbar sind und auf dem Papier wenig genaues liefern.

Die Schriftsteller, welche von der Theilung der Grundflächen handeln, sagt der Verfasser des Traité de Topographie No. 65., beschäftigen sich mehr damit, Probleme für die Neugierde aufzustellen und durch geometrische Konstructionen zu lösen, als die Methode des Kalkuls zu lehren, welche bei ökonomischen Vermessungen die vorzügliche ist. Man fordert aber, wegen dem steigenden Werth der Ländereien, nicht nur die genauesten Theilungen derselben, son-

dern auch die schicklichste Einrichtung der Theilstücke für die Benutzungsart, und hierauf wird in dem angeführten Werke eben so wenig, wie in andern mir bekannten Werken, Bedacht genommen.

Die folgende Anweisung ist die Frucht der mannichfaltigsten Erfahrungen, wozu die Leitung verschiedener Bannvermessungen mir Gelegenheit gab. Sie besteht in einer geringen Anzahl allgemeiner Vorschriften, deren Anwendung auf alle in der Ausübung wohl möglich vorkommende Fälle durch Beispiele erläutert wird, die nicht bloß in dieser Absicht erdacht, sondern wirklich ausgeführt worden sind.

Daß die Methode des Kalkuls, in Rücksicht der schärferen Bestimmungen, den Vorzug verdient, wird Niemand in Abrede setzen; daß sie aber auch auf einem kürzeren und bequemeren, wo nicht ganz einzigen Wege, zum Ziel führt, dies wird sich aus der Vergleichung der Arbeit zeigen, die mit jedem andern Verfahren schon in den leichtesten Theilungsfällen verbunden ist. Nicht nur um Raum zu sparen, sondern vielmehr aus der Ueberzeugung, daß jede Rechnungsregel, in der Gestalt einer algebraischen Formel,

leichter zu übersehen und anzuwenden sey, überließ ich es den Lesern selbst, diese in Worte zu übersetzen, wo sie es nützlich finden mögten.

Die Gleichungen des dritten Abschnitts sind in der allgemeinen Gleichung für die gerade Linie enthalten §. 39. Tom. II. L. Euleri introduct. in anal. infin. Es schien mir nöthig, sie aus andern Gründen abzuleiten, und sie für den Gebrauch, den ich davon zu machen lehre, faßlicher einzurichten, um dem angehenden Geometer hierdurch zugleich ein Mittel mehr zu überliefern, sich die Arbeit auf dem Felde leichter und die Resultate desselben von den Dimensionen eines Grundrisses unabhängig zu machen, wo es auf genaue Flächenbestimmungen ankommt. In der gleichen Absicht machte ich vor einiger Zeit die Gründe eines neuen polygonometrischen Verfahrens bekannt, wodurch nicht nur die Flächenberechnung, sondern auch die Konstruction jedes Vielecks aus dem gegebenen Umfang auf die Methode der rechtwinklichten Coordinaten, als der einfachsten in der praktischen Geometrie, zurückgeführt wird. Das schmeichelhafte Urtheil, welches unter andern die monatliche Correspondenz des

Herrn von Zach darüber fällte, und mehrere Anfragen um nähere Aufschlüsse, bestimmten mich, die neue Methode in dem vierten Abschnitt mit einigen Zusätzen und Erläuterungen herauszugeben, um sie allen Lesern, die nur mit den ersten Elementen der Trigonometrie bekannt sind, verständlich und nützlich zu machen. Die Vermessung aus dem Umfang ist nicht selten die einzige, die dem Geometer zu Gebot steht. Bei allen geometrischen Verrichtungen ist die Theorie von den Folgen der Fehler unentbehrlich. Ein kurzer Beitrag dazu, welcher die Kreuzscheibe zum Gegenstand hat, wird in einer Anleitung, die sich größtentheils auf die Grundlagen rechtwinklichter Coordinaten stützt, nicht am unrechten Ort erscheinen, und den Anfänger nicht nur belehren, daß der sichere und fertige Gebrauch dieses in vielen Fällen eben so nützlichen als einfachen Werkzeugs hierauf hauptsächlich beruht, sondern denselben auch zugleich auf das sicherste Mittel zur Prüfung und Berichtigung seiner Arbeit aufmerksam machen.

Erster Abschnitt.

Theilungs-Formeln.

§. 1.

Aufgabe.

Die Parallele zu bestimmen, welche mit der Grundlinie des Vierecks ABCD Fig. 1 — 6. den Flächenraum q einschließe, sey die Grundlinie $AD = a$, die Ordinate $BG = b$, $AG = g$, $CF = c$, $DF = f$, gegeben.

Auflösung.

Setzt man die Parallele $A'D' = t$, ihre Höhe $A'G' = n$, und nimmt man die Quotienten $\frac{AG}{BG} = g/b$, $\frac{DF}{CF} = f/c$ positiv, wenn die Ordinaten auswärts fallen, negativ, wenn sie inwärts fallen, und ihre algebraische Summe

$$S = g/b \pm f/c$$

negativ, wenn der größere Quotient negativ ist, und

positiv im entgegengesetzten Falle, so ist

$t = \sqrt{(a^2 \mp 2\,sq)}$ das obere Zeichen für Fig. 1, 2, 3, das untere für 4, 5, 6.

$$n = \frac{2q}{a+t} = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 2\,sq)}}{s}$$

Beweis.

Wegen Aehnlichkeit der Triangel ABG und AA′G′ DCF und DD′F′ ist

$$AG' = \frac{ng}{b} \qquad DF' = \frac{nf}{c}$$

$$AG' \pm DF' = n\,(g/b \pm f/c) = ns,$$ daher

1) Fig. 1, 2, 3.

$$t = A'D' = AD - (AG' \pm DF') = a - ns$$

$$AD + A'D' = 2a - ns$$

$$q = \square\, AA'D'D = n\frac{(2a - ns)}{2} = an - \tfrac{1}{2}\,sn^2,$$ woraus

$$n = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 2sq)}}{s},$$ und da $t = a - ns$, woraus

$$n = \frac{a - t}{s},$$ so folgt

$$t = \sqrt{(a^2 - 2sq)}$$

$$n = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 2sq)}}{s} = \frac{2q}{a+t}$$ als Quotient der beiden Parallelseiten in den doppelten Inhalt des Trapez AA′D′D.

2) Fig. 4, 5, 6.

$$t = AD + (AG' \pm DF') = a + ns$$
$$AD + A'D' = 2a + ns$$
$$q = an + \tfrac{1}{2}\, sn^2$$
$$t = \sqrt{(a^2 + 2sq)}$$
$$n = \frac{-a + \sqrt{(a^2 + 2sq)}}{s} = \frac{2q}{a+t}$$

§. 2.

Sind A und D die Winkel an der Grundlinie, so ist

$$s = \frac{\cos. A}{\sin. A} \pm \frac{\cos. D}{\sin. D} = \cot. A \pm \cot. D$$

§. 3.

Ist die Seite AB senkrecht, Fig. 3 und 6, so ist

$$s = f/c,\ t = \sqrt{(a^2 \mp 2\, f/_c\, q.)}$$

§. 4.

Sind die Seiten AD, BC parallel, folglich b = c, und setzt man BC = d, so ist

1) Fig. 7, wo a > d

$$s = \frac{g+f}{b} = \frac{a-d}{b}$$
$$t = \sqrt{(a^2 - 2q\, \frac{a-d)}{b}}$$

2) Fig. 8, wo d > a

$$s = \frac{d-a}{b},\ t = \sqrt{(a^2 + 2q\, \frac{d-a}{b})}$$

§. 5.

Zieht man, wie in Fig. 1, die Parallelen A′D′ A″D″, A‴D‴.... in den Höhen 1, 2, 3 .... n, so ist die

$$
\begin{aligned}
&1^{te}\ \text{Parallele} = a \pm s \ (\text{§. 1.})\\
&2^{te}\ \quad — \quad = a \pm 2s\\
&3^{te}\ \quad — \quad = a \pm 3s\\
&\vdots\\
&n^{te}\ \quad — \quad = a \pm ns
\end{aligned}
$$

Die Trapezien AA′D′D, A′A″D″D′ u. s. w. bilden ebenfalls eine Reihe, deren Differenz = s; es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
&\text{das } 1^{te}\ \text{Trapez} = a \pm {}^1/_2\, s\\
&2^{te}\ \quad — \quad = a \pm {}^3/_2\, s\\
&3^{te}\ \quad — \quad = a \pm {}^5/_2\, s\\
&\vdots\\
&n^{te}\ \quad — \quad = a \pm \frac{(2n-1)}{2}\, s
\end{aligned}
$$

folglich die successiven Summen der

$$
\begin{aligned}
&2 \text{ ersten Trapezien} = 2a \pm {}^4/_2\, s\\
&3 \quad — \quad — \quad = 3a \pm {}^9/_2\, s\\
&4 \quad — \quad — \quad = 4a \pm \frac{16}{2}\, s\\
&\vdots\\
&n \quad — \quad — \quad = na \pm \frac{n^2}{2}\, s = q \ (\text{§. 1.})
\end{aligned}
$$

§. 6.

Setzt man den Abstand der Parallelen $= \beta$, so ist

$AG' = \frac{\beta g}{b}$ $DF' = \frac{\beta f}{c}$ folglich

$AG' \pm DF' = \beta s$ die Differenz der Parallelen,

$\beta^2 s$ die Differenz der Trapezien, nämlich

I.

die 1te Parallele $= a \pm \beta s$

2te — $= a \pm 2\beta s$

:

n^{te} — $= a \pm n\beta s$

II.

das 1te Trapez $= \beta(a \pm {}^1/_2\, \beta s) = \beta a \pm {}^1/_2\, \beta^2 s$

2te — $= \beta(a \pm {}^3/_2\, \beta s) = \beta a \pm {}^3/_2\, \beta^2 s$

3te — $= \beta(a \pm {}^5/_2\, \beta s) = \beta a \pm {}^5/_2\, \beta^2 s$

:

n^{te} — $= \beta a \pm \frac{2n - 1}{2} \beta^2 s$

$(n+1)^{te} = \beta a \pm \frac{2n + 1}{2} \beta^2 s$

III.

Die Summe der

2 ersten Trapezien $= 2\beta a \pm {}^4/_2\, \beta^2 s$

3 — — $= 3\beta a \pm {}^9/_2\, \beta^2 s$

4 — — $= 4\beta a \pm {}^{16}/_2\, \beta^2 s$

:

m — $= m\beta a \pm \frac{m^2 \beta^2 s}{2} = q$, woraus

$$m = \frac{\pm a \mp \sqrt{(a^2 \mp 2sq)}}{\beta s}$$

und da m die Menge der Trapezien ausdrückt, welche q hier enthält, und jedes dieser Trapezien die Höhe β hat, so findet man wieder die Formel §. 1. nämlich

$$n = m\beta = \frac{\pm a \mp \sqrt{(a^2 \mp 2sq)}}{s}$$

§. 7.

Zieht man Fig. 1 — 6 die Diagonalen AD′, A′D″, A″D‴ ...., so entsteht die Reihe der Trapezien

AA′D′D″, A′A″D″D‴.....

Die Parallele $A'D' = a \mp \frac{1}{2} s$ (§. 5.) theilt das erste dieser Trapezien in zwei gleiche Triangel, deren Höhe = 1, die folgende Parallele theilt eben so das folgende Trapez, und man findet

1) das erste Trapez $AA'D'D'' = a \mp s$,
das zweite — $= a \mp 2s$
:
das n^{te} — $= a \mp ns$

2) Die Summe der
2 ersten Trapezien $= 2a \mp 3s$
3 — — $= 3a \mp 6s$
4 — — $= 4a \mp 10s$

und sofort die Summe q der

n erste Trapezien $= na \mp \frac{n(n+1)}{2}s$,

... der Coefficient von s sich aus der Summe aller

vorgehenden Coefficienten von a, das ist aus der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n bildet.

Und für das □ $AA'''D'D^{IV} = q$ ist demnach

$$n = \frac{\pm (a \mp \frac{1}{2} s) \mp \sqrt{(a \mp \frac{1}{2} s)^2 \mp 2sq}}{s}$$

die Höhe des Punktes A'''

$n + 1$ die Höhe des Punktes D^{IV}.

§. 8.

Setzt man β für den Abstand der Parallelen AD, A′D′, A″D″ .... §. 7, so ist

$$n = \frac{\pm (a \mp \frac{1}{2} \beta s) \mp \sqrt{(a \mp \frac{1}{2} \beta s)^2 \mp 2sq}}{s}$$

§. 9.

Aufgabe.

Für die Seiten IH, HG, GF, FE des Vielecks Fig. 9 sind die Höhen der Punkte A, B, C, D gegeben, nebst der Höhe A′a, der Parallele PA′; man verlangt die Höhen β, γ, δ der folgenden Parallelen A′B′, B′C′, C′P.

Auflösung.

Bezeichnet man die Diagonalen AH, BG, CF durch A, B, C, ihre Theile A′H, B′G, C′F durch A′, B′, C′, ferner die Perpendickel

Am,	An,	Bo,	Bp,	Cq,	Cr durch
I	II	III	IV	V	VI

und setzt man $A'a = 1$, so ist

1) $I : A = 1 : A'$

$$\frac{A : II = A' : \beta}{\beta = \frac{II}{I}}$$ folglich $I : II = 1 : \beta$, woraus ; eben so ist

2) $\gamma = \frac{II \times IV}{I \times III}$ als 4te Proportionale zu III, IV und β

3) $\delta = \frac{II \times IV \times VI}{I \times III \times V}$ als 4te Proportionale zu V, VI und γ

und so wird man die Höhe jeder folgenden Parallele auch finden, wenn man, von Am ausgehend, alle ungeradstellige Perpendickel in einander multiplicirt, und das Produkt aller geradstelligen Perpendickel damit dividirt.

§. 10.

Aufgabe.

Von einem Vieleck Fig. 9 ein Flächenstück Q abzutheilen und die gebrochene Theillinie PA'B'C'P parallel mit den Seiten IH, HG, GF, FE anzulegen, sey

$$IH = a,\ \frac{Jl}{Kl} + \frac{Hm}{Am} = s \text{ negativ}$$

$$AG = a',\ \frac{Hn}{An} + \frac{Go}{Bo} = s' \text{ negativ}$$

$$GF = a'',\ \frac{Fq}{Cq} - \frac{Gp}{Bp} = s'' \text{ positiv}$$

$$FE = a''',\ \frac{Fr}{Cr} + \frac{Et}{Dt} = s''' \text{ negativ.}$$

Auflösung.

Setzt man n für die Höhe der ersten Parallele PA′, so erhält man nach §. 9 βn für die Höhe der zweiten, γn für die dritte und δn für die vierte, daher

$$\begin{aligned} Q = {} & an - \tfrac{1}{2}\, sn^2 \; (\square\, A'PIH\ \S.\ 5.\ 2.) \\ & + a'\beta n - \tfrac{1}{2}\, s'\beta^2 n^2 \; (\square\, B'A'HG\ \S.\ 6.\ 3.) \\ & + a''\gamma n - \tfrac{1}{2}\, s''\gamma^2 n^2 \; (\square\, C'B'GF) \\ & + a'''\delta n - \tfrac{1}{2}\, s'''\delta^2 n^2 \; (\square\, PC'FE) \end{aligned}$$

und setzt man zur Abkürzung des Ausdrucks

$$A = \alpha + a'\beta + a''\gamma + a'''\delta$$

$$\pm S = -s - s'\beta^2 + s''\gamma^2 - s'''\delta^2, \text{ so ist}$$

$$Q = An \pm \tfrac{1}{2}\, n^2 S, \text{ woraus}$$

$$n = \frac{\mp A \pm \sqrt{(A^2 \pm 2\,SQ)}}{S}$$

Anmerkung.

Die Wurzelgröße drückt hier den Werth der gebrochenen Theillinie nicht aus, aber ihre Zeichen bleiben dem Gesetze §. 1. unterworfen. Denn so wie Q zunimmt, muß $\sqrt{(A^2 - 2\,SQ)}$ abnehmen, folglich $A - \sqrt{(A^2 - 2\,SQ)}$ zunehmen, und $A + \sqrt{(A^2 - 2\,SQ)}$ hingegen abnehmen; da nun der Voraussetzung gemäß n mit Q zunehmen soll, so erfordert $\sqrt{(A^2 - 2\,SQ)}$ das negative Zeichen.

Für $\sqrt{(A^2 + 2\,SQ)}$ findet das Gegentheil statt, und $n = -A - \sqrt{(A^2 + 2\,SQ)}$ würde eine negative Größe gegen die Voraussetzung seyn.

§. 11.

Daß die vorgehende Theilung nichts mit der Aufgabe gemein hat, von einem Vieleck ABCDE Fig. 10. den ähnlichen Theil Abcde in einem gegebenen Verhältnisse m : 1 abzuschneiden, ist einleuchtend, man nimmt hier bekanntlich die Punkte

b, c, d, e, so daß $Ab = AB \sqrt{1/m}$

$Ac = AC \sqrt{1/m}$ u. s. w.

§. 12.

Um die Berechnung des Ausdrucks $\sqrt{(a^2 \pm 2sq)}$ für große Zahlen zu erleichtern, betrachtet man

1) $a^2 + 2sq$ als das Quadrat der Hypothenuse c eines rechtwinklichten Dreiecks ABC Fig. 11.

a^2 als das Quadrat der Seite $BC = a$

$2sq$ als das Quadrat der Seite $AC = b$

da nun $c = \sqrt{(a^2 + 2sq)} = \frac{a}{\sin. A.}$

$$\text{tang. } A = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{2sq}}$$

$$\log. \text{tang. } A = \log. a - \tfrac{1}{2} \log. 2sq$$

so sucht man den Winkel, welcher dieser Tangente in den trigonometrischen Tafeln entspricht, man nimmt den Logarithmus des Sinus dieses Winkels und subtrahirt denselben von Log. a; der Rest ist der Logarithmus von $\sqrt{(a^2 + 2sq)}$

Man betrachtet

2) $a^2 - 2sq$ als das Quadrat der Seite $AC = b$ des rechtwinklichten △ ABC Fig. 12.

a^2 als das Quadrat der Hypothenuse $BC = a$

$2sq$ als das Quadrat der Seite $AB = c$

und da hier $b = \sqrt{(a^2 - 2sq)} = \frac{c}{\text{tang.} C}$

$\sin. C = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2sq}{a}}$, so sucht man den Winkel dessen Log. Sinus = ½ Log. 2sq — Log. a, subtrahirt Log. Tang. C von ½ Log. 2sq und erhält zum Rest Log. $\sqrt{(a^2 - 2sq)}$

§. 13.

Aufgabe Fig. 13.

Die Seiten und Coordinaten des △ $ABC = Q$ sind bekannt, man verlangt die Seiten und Coordinaten jedes ähnlichen Dreiecks $XYZ = q$

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$, $Bb = p$, $Ab = d$ und man setze $XC = x$, $YC = y$, $XY = v$, $YZ = z$, $XZ = t$, so drückt $n \sqrt{\frac{2q}{ap}}$ jede der gesuchten Linien aus, wenn man die entsprechende Linie des △ ABC für n substituirt.

Beweis.

1) $CA'' : CX'' = Q : q$ oder

$a^2 : x^2 = \frac{ap}{2} : q$, woraus $x = a\sqrt{\frac{2q}{ap}}$

2) $a : b = x : y$ oder

$a^2 : b^2 = x^2 : y^2$

$a^2 : b^2 = \frac{2aq}{p} : y^2$, woraus $y = b\sqrt{\frac{2q}{ap}}$

3) $a^2 : c^2 = x^2 : v^2$

$= \frac{2aq}{p} : v^2$, woraus $v = c\sqrt{\frac{2q}{ap}}$

4) $a^2 : p^2 = x^2 : z^2 = \frac{2aq}{p} : z^2$, woraus $z = p\sqrt{\frac{2q}{ap}}$

5) $a^2 : d^2 = x^2 : t^2 = \frac{2aq}{p} : t^2$, woraus $t = d\sqrt{\frac{2q}{ap}}$

§. 14.

Aufgabe.

Von dem gegebenen Viereck ABCD Fig. 14 und 15 ein Flächenstück Q abzutheilen, und die Theillinie XY parallel CD Fig. 14, parallel AB Fig. 15 anzulegen.

Auflösung.

Nach den Analogien

$BG : Bb = GC : bT = BC : BT$

verlängert man BC und AD bis zum Durchschnitt T,

und bestimmt für die ähnlichen Triangel

CDT und XYT Fig. 14

ABT und XYT Fig. 15

die unbekannten Größen x, y, v, z, t nach §. 13, indem man

I. Fig. 14

$a = TD, p = Cc, d = Dc, q = \triangle XYT = \triangle CDF + Q$

II. Fig. 15

$a = AT, p = Bb, d = Ab, q = \triangle XYT = \triangle ABT - Q$

in Anwendung der Formel $n \sqrt{\frac{2q}{ap}}$ setzt, wonach denn

Fig. 14 $DX = x - a \quad CY = y - b$

Fig. 15 $AX = a - x \quad BY = b - y$ gefunden wird.

§. 15.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Inhalt q des Vierecks ABCD Fig. 1 — 6, aus der Grundlinie $AD = a$, der Ordinate BG oder $AB = p$, $AG = {}^1/n\, p$ und dem Verhältnisse $\frac{DF}{CF} = {}^1/m$, die Ordinaten CF und DF zu bestimmen.

Auflösung.

Setzt man $CF = y$, so ist $DF = {}^1/m\, y$ und

$$1)\ y = \frac{2q - ap}{a \mp p\,({}^1/n + {}^1/m)} \quad \begin{cases} \text{Fig. 1} \\ \text{Fig. 4} \end{cases}$$

2) $y = \frac{2q - ap}{a + p\,(1/n - 1/m)}$ Fig. 5

3) $y = \frac{2q - ap}{a + p\,(1/m - 1/n)}$ Fig. 2

4) $y = \frac{2q - ap}{a \mp 1/m\,p}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Fig. 3} \\ \text{Fig. 6} \end{array} \right.$

und setzt man hier wieder

$$s = 1/n \pm 1/m = \frac{AG}{BG} \pm \frac{DF}{CF} \quad \text{§. 1,}$$

so ist allgemein

$$y = \frac{2q - ap}{a + sp}$$

Beweis Fig. 1.

$$2 \square BCGF = (p + y)\,(a - 1/n\,p - 1/m\,y)$$
$$= ap + ay - py\,(1/n + 1/m) - 1/n\,p^2 - 1/n\,y^2$$
$$2 \triangle ABG + 2 \triangle DCF = \qquad 1/n\,p^2 + 1/n\,y^2$$

folglich $2 \square ABCD = 2q = ap + ay - py\,(1/n + 1/m)$

woraus $y = \frac{2q - ap}{a - p\,(1/n + 1/m)}$

und eben so werden die übrigen Fälle bewiesen.

§. 16.

Bezeichnet man die Grundlinien und Coordinaten der Vierecke Fig. 1 — 6 durch a, b, g, c, f (§. 1) so erhält man, nach der vorgehenden Beweisart, folgende Ausdrücke für die Flächen derselben

$\frac{1}{2} c (a \mp g) + \frac{1}{2} b (a \mp f)$ Fig. 1 und 4

$\frac{1}{2} c (a \mp g) + \frac{1}{2} b (a \pm f)$ Fig. 2 und 5

$\frac{1}{2} ca + \frac{1}{2} b (a \mp f)$ Fig. 3 und 6

welche sowohl zur Abkürzung, als auch zur Verification des gewöhnlichen Kalkuls dienlich sind.

§. 17.

Aufgabe.

Das Viereck ABCD Fig. 16 aus dem gegebenen Punkt T in die beiden Stücke ATUD, TBCU zu theilen, sey ATUD $= q$, $Ad = a$ $\frac{AG}{BG} = \frac{1}{n}$ $\frac{DF}{CF} = \frac{1}{m}$ $TK = p$ und hiernach der Punkt U zu bestimmen.

Auflösung.

Setzt man $Uu = y$, so ist $Du = \frac{1}{m} y$ wegen Aehnlichkeit der Triangel DUu und DCF ferner $Ak = \frac{1}{n} p$, folglich

$$y = \frac{2q - ap}{a + p\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)} \text{ nach §. 15 3}$$

§. 18.

Soll das Viereck ABCD Fig. 17 aus mehrern Punkten E, F, getheilt werden, so berechnet man, wie in §. 17, y für AEHD $= q$

y′ für AFGD $= q + q' = Q$

die Größen a, m, n sind hier beständige Größen, nur p verwandelt sich in p′ und q in Q

§. 19.

Aufgabe.

Die Fläche ABEF Fig. 18, wird durch die gerade Linie CD in die beiden Vierecke ABCD, CDFE getheilt, man verlangt die gerade Linie GH, wodurch jedes dieser Vierecke wieder in zwei Vierecke nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werde.

Auflösung.

Es sey $AD = a$, $DF\ \mathfrak{a}$, $AF = a + \mathfrak{a} = A$

$$\frac{B\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} = m, \quad \frac{C\mathfrak{C}}{D\mathfrak{C}} = n, \quad \frac{E\mathfrak{E}}{F\mathfrak{E}} = r$$

das abzuschneidende Viereck $AHID = q$
$GIDF = \mathfrak{q}$
deren Summe $AHGF = q + \mathfrak{q} = Q$
und man setze $H\mathfrak{H} = b$, $I\mathfrak{I} = p$, $G\mathfrak{G} = g$, so ist $D\mathfrak{I} = p/n$, $A\mathfrak{H} = b/m$, $F\mathfrak{G} = g/r$ und nach

2 §. 15, $b = \frac{2q - ap}{a + sp}$, wo $s = {}^1/n - {}^1/r$ für $\square$ AHID

1 §. 15, $g = \frac{2\mathfrak{q} - ap}{a - \mathfrak{s}p}$, wo $\mathfrak{s} = {}^1/r + {}^1/n$ für $\square$ DFGI

diese Gleichungen geben einen Ausdruck für das $\square$ $AHGF = Q$, worin nur p unbekannt, und folglich zu bestimmen ist. Man hat nämlich nach §. 15
$Ag + Ab - bg\ ({}^1/m + {}^1/r) = 2\,Q = 2\,\square\,AHGF$
und wenn man beide Seiten mit mr multiplizirt
$Amrg + Amrb - bg\ (m + r) = 2\,mr\,Q$

Substituirt man hierin die obigen Werthe für b und g, so folgt

$$p^2\,(Amr\,(a\mathfrak{s} - \mathfrak{a}s) - a\mathfrak{a}\,(m+r) + 2mrs\mathfrak{s}Q)$$
$$+ 2p\,(Amr\,(\mathfrak{q}s - q\mathfrak{s} - a\mathfrak{a}) + (m+r)\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) - mrQ\,(\mathfrak{a}s - a\mathfrak{s}))$$
$$= 2a\mathfrak{a}mrQ - 2Amr\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) + 4q\mathfrak{q}\,(m+r)$$

und setzt man den Werth des Factors von $p^2 = F$, des Factors von $2p = f$, des zweiten Gliedes der Gleichung $= Z$, so ist $Fp^2 + 2fp = Z$, und hieraus $p = \pm\sqrt{\left(\frac{Z}{F} + \frac{f^2}{F^2}\right)} - \frac{f}{F}$ wonach b und g nun aus den obigen Gleichungen bestimmt werden.

§. 20.

I. Zusatz.

1) Fallen die beiden Perpendickel B𝔅, E𝔈 auswärts, so ist

$$s = 1/m + 1/n,\quad \mathfrak{s} = 1/r - 1/n$$
$$F = a\mathfrak{a}\,(m+r) - Amr\,(\mathfrak{a}s + a\mathfrak{s}) - 2mrs\mathfrak{s}Q$$
$$f = Amr\,(\mathfrak{q}s - q\mathfrak{s} - a\mathfrak{a}) - (m+r)\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) - mrQ\,(\mathfrak{a}s + a\mathfrak{s})$$
$$Z = 2a\mathfrak{a}mrQ - 2Amr\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) - 4q\mathfrak{q}\,(m+r)$$

2) Fällt B𝔅 auswärts und E𝔈 inwärts, so ist

$$s = 1/m + 1/n,\quad \mathfrak{s} = 1/r + 1/n \text{ (negativ)}$$
$$F = a\mathfrak{a}\,(r-m) + Amr\,(a\mathfrak{s} - \mathfrak{a}s) + 2mrs\mathfrak{s}Q$$
$$f = Amr\,(\mathfrak{q}s - q\mathfrak{s} - a\mathfrak{a}) - (r-m)\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) - 2mrQ\,(\mathfrak{a}s - a\mathfrak{s})$$
$$Z = 2a\mathfrak{a}mrQ - 2Amr\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) - 4q\mathfrak{q}\,(r-m)$$

§. 21.

II. Zusatz.

Ist CD senkrecht Fig. 19, so ist

$$F = A\,(\mathfrak{a}r + am) + a\mathfrak{a}\,(m + r) - 2Q$$

$$f = Q\,(am + \mathfrak{a}r) - A\,(a\mathfrak{a}mr + r\mathfrak{q} + mq) - (m + r)\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q)$$

$$Z = 2a\mathfrak{a}mr\,Q - 2\,Amr\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) - 4q\mathfrak{q}\,(m + r)$$

§. 22.

III. Zusatz.

Wenn CD senkrecht ist und

1) die Perpendickel B𝔅, E𝔈 auswärts fallen, so ist

$$F = a\mathfrak{a}\,(m + r) - A\,(am - \mathfrak{a}r) - 2Q$$

$$f = A\,(r\mathfrak{q} + mq - a\mathfrak{a}mr) - (m + r)\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) - Q\,(\mathfrak{a}r - am)$$

$$Z = 2a\mathfrak{a}mr\,Q - 2\,Amr\,(\mathfrak{a}q + a\mathfrak{q}) - 4q\mathfrak{q}\,(m + r)$$

2) B𝔅 auswärts, E𝔈 inwärts fällt, so ist

$$F = a\mathfrak{a}\,(r - m) + A\,(am - \mathfrak{a}r) + 2Q$$

$$f = A\,(r\mathfrak{q} - mq - a\mathfrak{a}mr) - (r - m)\,(\mathfrak{a}q + a\mathfrak{q}) - Q\,(\mathfrak{a}r - am)$$

$$Z = 2a\mathfrak{a}mr\,Q - 2\,Amr\,(\mathfrak{a}q + a\mathfrak{q}) - 4q\mathfrak{q}\,(r - m)$$

§. 23.

Um das Vieleck Fig. 20 vermittelst zweier geraden Linien CD, HG, wovon die erstere gegeben ist, in die Stücke AHID, DIGF, ICG, HICELBH zu zerlegen,

werden nur die Coordinaten der Punkte H, G nach dem vorgehenden Verfahren bestimmt.

Anmerkung.

Eine trigonometrische Auflösung dieses interessanten Problems findet man im 1 Bande §. 45. der schönen Sammlung geometrischer Aufgaben von Meyer Hirsch.

Zweiter Abschnitt.

Die Anwendung.

§. 24.

Erstes Beispiel.

Von einer Hofraite ABCD Fig. 21 ein Trapez ADPI von $50^{□°}$ abzuschneiden, werden die Durchschnittspunkte der Parallele PI gesucht.

AD ist 20° lang, CD senkrecht auf AD

die Ordinate BG $= 8^{\circ}.40$, die Abrisse AG $= 0^{\circ},66$

Für die Berechnung nach der Formel §. 3 ist hier

$q = 50$

$a = 20$

$c = 8,40$

$f = 0,66$

$s = f/_c = \frac{0,66}{8,40}$

(

$2\,sq = 7{,}8571 \quad 2\,sq + a^2 = 407{,}8571$

$PI = t = \sqrt{407{,}8571} = 20{,}195$

$PD = Ji = n = \frac{2q}{a+t} = 2{,}49$

$Ai = PI - AD = 20{,}195 - 20{,} = 0{,}195$

$AI = \sqrt{(Ji'' + Ai'')} = 2{,}495$

§. 25.

Zweites Beispiel.

Die Theillinie NM senkrecht auf die Grundlinie KL Fig. 22 zu richten, um das Viereck in zwei gleiche Stücke abzutheilen, sucht man die Entfernungen AM und LN aus den folgenden Bestimmungen.

$KL = 57^\circ{,}46 \quad BC = 2^\circ{,}60 \quad KC = 1^\circ{,}$

$AD = 3^\circ{,}20 \quad DL = 0{,}84$

wonach der halbe Flächeninhalt $Q = 83^{\square\circ}{,}\ 06^{\square\prime}$

Berechnung.

Da NM parallel mit AD und BC eingerichtet werden soll, so nimmt man zur Anwendung der Formel 1 §. 4 $AD = 3^\circ{,}\ 20 = a$ für die Grundlinie des Trapez $AMND = Q + \triangle\ ADL = 83{,}06 + 1{,}34 = 84^{\square\circ}{,}\ 40^{\square\prime} = q$

$d = BC = 2^\circ{,}60, \; b = CD = KL + LD - KC = 57^\circ{,}30$

$$NM = t = \sqrt{\left(a^2 - 2q\frac{a-d}{b}\right)} = \sqrt{(10{,}24 - 1{,}7675)}$$

$$= 2{,}\ 91.$$

$$DN = n = \frac{2q}{a+t} = \frac{168,80}{3,20+2,91} = 27,63$$

$$LN = DN - DL = 27,63 - 0,84 = 26,79$$

AM = DN wegen der unbedeutenden Differenz AD — MN

Anmerkung.

Man könnte sich an der Bestimmung des Punktes N begnügen und hierauf die senkrechte Theillinie NM = 2,91 errichten, wenn es nicht weit bequemer und sicherer wäre, den Grenzpunkt M durch Abmessung der Länge AM auf dem Felde einzurichten, und NM nur zur Verification auszumessen. Die Maßeintheilungen in der Ausübung gehen, aufs schärfste genommen, nur bis auf einen halben Zoll; die Größe NM kann daher nicht genauer, als wie im Obigen angesetzt, und die Gleichheit der Theilstücke ALMN von 83,06 und BKNM von 83,04 nicht näher gebracht werden.

§. 26.

Wenn der Quotient $\frac{AD - BC}{CD}$ im Vorgehenden nicht über einen halben Zoll beträgt, und die Triangel KBC, ADL ganz unbedeutende Größen sind, so ist die Theillinie NM das arithmetische Mittel der Perpendickel AD und BC.

Beispiel.

KL = 36°. AD = 8 DL = 0,10 BC = 7,80
KC = 0,06

$$NM = \frac{8 + 7,8}{2} = 7,90$$

DN = 17,95
LN = 17,85

§. 27.

Das folgende, sehr einfache Verfahren, ein Viereck ABKL, Fig. 23, im Durchschnitt der Längenseiten zu halbiren, ist von Ozanam (Division des Champs Problem VIII.)

Um die Theillinie NM anzulegen, nimmt man

$BM = \frac{1}{2} BA$

$KN = \frac{AD \times KL}{AD + BC}$ als viertes Glied der Proportion,

$BC + AD : AD = KL : KN$, denn hieraus folgt

$BC : AD = KL - KN : KN$

$BC : AD = LN : KN$

$BC \times KN = AD \times LN$

$\triangle KBN = \triangle ANL$, und da

$\triangle BNM = \triangle ANM$ wegen gleicher Grundlinie und Höhe, so folgt auch

$\square BKNM = \square ALNM$

Beispiel.

$KL = 35^o. \quad AB = 34^o,26 \quad BC = 9, \quad AD = 5,$

$BM = 17,13$

$$KN = \frac{35 \times 5}{9+5} = 12,5$$

Wegen den spitzen Winkeln bei N und M fallen hier die Theilstücke nicht so schicklich für die Benutzung aus, und dies wird immer der Fall seyn, wenn die Differenz AD — BC nicht sehr unbedeutend ist.

§. 28.

Drittes Beispiel.

Das Viereck ABCD, Fig. 24, durch die Theillinie NM parallel AD zu theilen, gegeben $AD = 64^o,5$ $BG = 21,4$, $AG = 2,3$, $CF = 22,6$, $DF = 3,1$ Inhalt $1359,84 = 2q$

Zur Anwendung der Formel §. 1 nimmt man hier

$$\frac{2,3}{21,4} = 0,1075$$

$$\frac{3,1}{22,6} = \frac{0,1371}{0,2446} = s \text{ (negativ)}$$

$$a^2 = 4160,2500$$

$$-2sq = \frac{332,6780}{3827,5720}$$

$$t = \sqrt{3827,5720} = 61.87 = NM$$

$$n = \frac{2q}{a+t} = 10,76 = Nn = Mm$$ und die Ab-

schnitte AN, DM ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Triangel

ABG und ANn
DCF und DMm

Anmerkung.

Wollte man die Höhe Nn hier durch den Ausdruck

$$n = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 2sq)}}{s} = \frac{a - t}{s}$$

bestimmen, so dürfte man die Decimalen für s nicht stärker abkürzen, als es zur Entwickelung der niedrigsten Decimalen für n zulässig wäre. Um n = 10,761 ... zu erhalten, müßte man schon s = 0,244645 und $a - \sqrt{(a^2 - 2sq)} = 64{,}5 - 61{,}867374 = 2{,}632626$ nehmen.

§. 29.

Viertes Beispiel.

Von dem Sechseck ABCDEF, Fig. 25, das Trapez AHGF = 194 □°, 30 □′ = q abzuschneiden, wo AF = 34, 26, der Winkel BAF = A = 89°. 52′
EFA = F = 81. 32

nimmt man nach §. 2

$$\begin{array}{rl} \text{cot. } A = & 0,00233 \\ + \text{cot. } F = & \underline{0,14885} \\ & 0,15118 = s \text{ negativ} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} a^2 = & 1173,7476 \\ -2sq = & \underline{58,7485} \\ & 1114,9991 \end{array}$$

$t = \sqrt{1114,9991} = 33,39 = HG$

$n = \frac{2q}{a+t} = 5,745$

AH = n. cosec. A = 5,745

FG = n. cosec. F = 5,81

§. 30.

Fünftes Beispiel, Fig. 26.

Das Trapez AMNI = 992391$^{\square°}$, 37$^{\square'}$ = q von dem Vieleck Fig. 26 abzuschneiden; gegeben
AY = 1717, 52, ∡ A = 80°, 46′ ∡ Y = 79°, 14′

Nach §. 2 und §. 12. 2

cot. A = 0, 1625617
cot. Y = 0, 1901573
S = 0, 3527190

l. q = 5, 9966830
l. s = 0, 5474289 — 1
l. 2 = 0, 3010300
5, 8451419
halbirt 2, 9225709 = ½ l. 2sq
— l. a = 3, 2349018
9, 6876691 — 10 = l. sin. C = l. sin. 29°. 9′. 14″

½ l. 2sq = 2, 9225709
— l. tang. C. = 9, 7464983 — 10
3, 1760726 = l. 1499, 935 = l. t
= l. MN

$$a - t = 1717,52 - 1499,935 = 217,585$$

$$\begin{aligned} l.\ a - t &= 2,3376290 \\ -\ l.\ s &= 0,5474289 - 1 \\ l.\ \frac{a-t}{s} = l.\ n. &= 2,7902001 = l.\ 616,88 \end{aligned}$$

Verification.

$$\begin{aligned} l.\ \frac{a+t}{2} = l.\ 1608,7275 &= 3,2064825 \\ +\ l.\ n &= 2,7902001 \\ & \overline{5,9966826} = l.\ q \end{aligned}$$

§. 31.

Sechstes Beispiel.

Das Grundstück Fig. 27 in vier gleiche Theile zu theilen, und die Theillinien parallel mit ad zu ziehen, wo ad = 60, bg = 12,8, ag = 3,2, cf = 11,5. df = 2,3 der Flächeninhalt = $732^{\square°}, 68^{\square'}$

$$\begin{aligned} \text{dessen } {}^1/_4 &= 183,17 = q \\ {}^2/_4 &= 366,34 = q' \\ {}^3/_4 &= 549,51 = q'' \end{aligned}$$

Berechnung.

$$s = \frac{32}{128} - \frac{23}{115} = {}^1/_{20} = 0,05$$

$$2sq = 18,317.\ t = \sqrt{(a^2 + 2sq)} = 60,15245,$$
$$n = 3,0489$$

$2\,sq' = 36{,}634 \quad t' = \sqrt{(a^2 + 2\,sq')} = 60{,}30251$

$n' = 6{,}0902$

$2\,sq'' = 54{,}951 \quad t'' = \sqrt{(a^2 + 2\,sq'')} = 60{,}45618$

$n'' = 9{,}1238$

wonach $n' - n$ die Höhe des Trapez ropt

$n'' - n'$ " " " " oikp

Nimmt man hiervon die für die Ausübung abgekürzten Werthe

$t = rt = 60{,}15 \quad t' = op = 60{,}305 \quad t'' = il = 60{,}455$

$n = 3{,}05 \quad n' - n = 3{,}04 \quad n'' - n' = 3{,}035$, so findet man

□ artd = 183,23 □ ropt = 183,09 □ oikp = 183,25

und genauer können diese Stücke bei der Vernachlässigung der niedrigeren Dezimalstellen in den Berechnungslinien nicht hervorgehen. Verrückt man hier die Höhen der Parallelen um ½ Zoll, so verändern sich die Flächen um 30 Quadratschuh. Vergrössert man die Parallelen um ½ Zoll, so verändern sich die Höhen und die Flächen der Trapezien noch beträchtlicher.

Für die Verification des vierten Theilstücks hat man

$bR = 12{,}8 - 9{,}125 = 3{,}675 \quad cK = 11{,}5 - 9{,}125 = 2{,}375$

$iR = \frac{ag \times bh}{bg} = \frac{3{,}2 \times 3{,}675}{12{,}8} = 0{,}92$ wegen Aehnlichkeit der Triangel abg und ibr

$lK = \frac{df \times cK}{cf} = \frac{2{,}3 \times 2{,}375}{11{,}5} = 0{,}475$ wegen Aehnlichkeit der Triangel dfc und lkc

$$RK = il + iR - JK = 60,9$$

und hiernach der Flächeninhalt = 183□°. 10□′

§. 32.

Siebentes Beispiel.

Das Vieleck ABCDE Fig. 28, aus der Mitte T der Seite AB in gleiche Theile zu theilen; gegeben AB = 12 DE = 24, 69 Bb = 9, 6 Cc = 15 Dd = 22, 2 Ab = 7,2 Ac = 11,40 cd = 17,60 dE = 10,80 und hiernach

□ ABCc = 194, 22
□ CDdc = 327, 36
△ EDd = 119, 88
ABCDE = 641, 46 wovon
die Hälfte = 320, 73 = q

I.

Man nimmt in Anwendung der Formel §. 17

$$a = AE = 39,8$$

$$1/n = \frac{Ab}{Bb} = 0,7500$$

$$-1/m = \frac{Ed}{Dd} = 0,4865$$

$$s = 0,2635$$

$$p = Tt = 1/2\ Bb = 4,8$$

$$At = 1/2\ Ab = 3,6$$

$$Uv = y = \frac{2q - ap}{a + ps} = \frac{641,46 - 191,04}{39,8 + 1,2648} = 10,97$$

$$Ev = {}^1/m\ y = 0,4865 \times 10,97 = 5,335$$

$$EU = \frac{DE \times Uv}{Dd} = \frac{24,69 \times 10,97}{22,2} = 12,20$$

II.

Oder man nimmt zur Aproximationsrechnung

1) die unbekannte Größe des Perpendickels Uv nach Gutdünken an, und setzt $Ev = \frac{Ed}{Dd} . Uv = {}^1/m\,Uv$;

2) Für das Viereck ATUE, die Produkte $\frac{AE + At}{2} . Uv$ und $\frac{AE - Ev}{2} . Tt$ §. 16

Für $Uv = {}^1/_2\ Dd = 11,10$ erhält man

$$Ev = {}^1/_2\ Ed = 5,40$$

$$\frac{39,80 + 3,60}{2} \times 11,10 = 21,70 \times 11,10 = 240,87$$

$$\frac{39,80 - 5,40}{2} \times 4,8 = 17,20 \times 4,8 = \underline{82,56}$$

$$323,43$$

3) Um die erforderliche Verminderung des Perpendickels hiernach auszumitteln, dividirt man den Factor $\frac{AE + At}{2}$ das ist 21, 70 in die Differenz

323,43 — 320,73 = 2,70, der Quotient ist 0,124; da aber die negative Abscisse Ev zugleich mit dem Perpendickel Uv vermindert wird, so zieht man etwas mehr ab, und nimmt Uv = 11, 10 — 0, 13 = 10,97 $Ev = {}^1/m\ Uv = 0,4865 \times 10,97 = 5,335$, wo

nach der Inhalt des □ ATUE nun aus folgenden Produkten besteht

$$21,7 \times 10,97 = 238,0490$$

$$\frac{39,80 - 5,335}{2} \times 4,80 = \frac{82,7160}{320,7650}$$

In den Fällen, wo der Quotient $\frac{ED}{Dd}$ nur ein geringer Bruch ist, kann dieses Verfahren mit Vortheil angewandt werden.

§. 33.

Ist die Seite senkrecht, worin der Punkt U Fig. 28 * für die Theillinie TU gesucht wird, so besteht sp aus der Abscisse At, und es ist $y = \frac{2q - ap}{a + At}$

§. 34.

Um das Fünfeck, Fig. 28, aus dem gegebenen Punkt C zu theilen, hat man zu dem Viereck

ABCc = 194, 22 §. 32

nur das △ Ccc′ = $\frac{126,\ 51}{320,\ 73}$ zu addiren, dessen

Grundlinie $cc' = \frac{2 \triangle Ccc'}{Cc} = \frac{2 \times 126,51}{15} = 16,87$

§. 35.

Neuntes Beispiel.

Drei Interessenten verlangen die Abtheilung des Feldes ABCD, Fig. 17. Der erste ¹/₆ des Flächen-

inhalts und der Seite AB, der zweite $^2/_6$, und der dritte $^3/_6$ davon. Hier ist

$AD = 50^\circ, AB = 25^\circ, Bb = 24^\circ, Ab = 7^\circ, CD = 37^\circ$

$Cc = 35^\circ,\ Dc = 12^\circ$, folglich

$AE = \frac{1}{6}\ AB = 4{,}165$

$AF = \frac{1}{2}\ AB = 12{,}5$

Der Flächeninhalt $= 1453{,}\ 50$

dessen Sechstheil $= 242{,}\ 25 = q$

und 2 Sechstheil $= 484{,}\ 50 = q'$

$Q = q + q' = 726{,}\ 75$

Berechnung nach §. 18.

$a = AD = 50,\ \frac{1}{n} = \frac{7}{24} = 0{,}2918$

$- \frac{1}{m} = \frac{12}{35} = 0{,}3428$

$- 0{,}0510 = s$

$p = Ee = \frac{1}{6}\,Bb = 4$

$p' = Ff = \frac{1}{2}\,Bb = 12$

$$Hb = \frac{2q - ap}{a - ps} = \frac{484{,}5 - 200}{(50 - 4) \times 0{,}051} = 5{,}715$$

$Dh = \frac{1}{m}\ Hb = 1{,}96$ $\quad DH = \frac{37 \times 5{,}715}{35} = 6{,}04$

$$Gg = \frac{2Q - ap'}{a - p's} = \frac{1453{,}5 - 600}{(50 - 12) \times 0{,}051} = 17{,}28$$

$Dg = \frac{1}{m}.\ Gg = 5{,}925$ $\quad DG = \frac{37 \times 17{,}28}{35} = 18{,}26$

§. 36.

Zehntes Beispiel.

Das Feld ABCDEF, Fig. 29, in die Theile ABCTW = 36□°, TUFW = 47□°, CDEU = 42□° abzutheilen.

Aufnahme.

AF = 31°,97, EF = 4,85, ED = 23,68, EC (senkrecht auf FE) = 23,80, DL (senkrecht auf EC) = 1,61, CL = 1,91, DC = 1,62, CB = 7,82, AB (senkrecht auf AF) = 2,18, Perp. CH = 2,48, Perp. EG = 4,825, AH = 7,81, HG = 23,68, GF = 0,48

Berechnung.

1) Zu dem □ ABCH = 18,20 hat man das □ CHFU = 64,80 zu fügen, um die Summe 83□° der beiden untern Theilstücken zu ergänzen und das obere Theilstück abzuschneiden.

Den Theilpunkt U nach §. 17 zu berechnen, nimmt man q = 64,8, a = HF = 24,16, p = CH = 2,48

$$1/m = \frac{GF}{EG} = \frac{0,48}{4,825} = \frac{96}{9,65}$$

$$UV = \frac{2q - ap}{a - p/m} = \frac{69,6832}{23,9133} = 2,915$$

$$EV = 1/m . UV = 0,29$$

$$UC = \sqrt{((UV - CH)^2 + HG^2)} = 23,88$$

2) Um die beiden unteren Theilstücke auseinander zu setzen, hat man zu dem □ ABCH = 18, 20

das □ HCTW = 17, 80

36, —

zu fügen.

Für die senkrechte Theillinie TW ist nach 2 §. 4
$q = 17,8$, $d = UV = 2,915$, $a = CH = 2,48$,
$b = HV = 23,88$

$$TW = t = \sqrt{\left(a^2 + 2q\,\frac{d-a}{b}\right)} = 2,61$$

$HW = n = \frac{2q}{a+t} = 7$, wovon auch die Hypothenuse CT nicht merklich verschieden ist.

$TU = 23,88 - 7 = 16,88$

$FU = 2,93$, weil $EG : EF = UV : FU$

$EU = 4,85 - 2,93 = 1,92$

§. 37.

Eilftes Beispiel.

Die Theillinien Ff′, Gg′, Fig. 30, zu bestimmen, welche die Seite BC des □ ABCD in 3 gleiche Abschnitte und den Flächenraum in 3 gleiche Stücke theilen, werden die Theilpunkte f′, g′ gesucht; gegeben
$AD = 11,22$, $Bb = 10,24$, $Ab = 2,38$, $Cc = 9,21$,
$Dc = 0,70$, $BC = 9,59$,
wonach der Inhalt $= 101^{\square°},74$ und
dessen Drittheil $= 33^{\square°},91$

Berechnung.

1) Man theilt BC in 3 gleiche Theile. Aus den Theilpunkten zieht man die Perpendickel Ff, Gg, welche den Abstand bc der Perpendickel Bb, Cc in gleiche Theile theilen und als Parallelen von Bb, Cc hervorgehen, wenn man nach §. 6 $a = Bb = 10,24$ setzt, ferner $\beta = bf = \frac{1}{3}\,bc = \frac{9,54}{3} = 3,18$,

$2\beta = bg = 6,36$, $s = \frac{Bb - Cc}{bc} = 0,108$, woraus

$Ff = a - \beta s = 10,24 - 0,34 = 9,9$

$Gg = a - 2\beta s = 10,24 - 0,68 = 9,56$;

2) Trapez $BbFf = 3,18 \left(\frac{10,24 + 9,9}{2}\right) = 32,0226$

" $FfGg = 3,18 \left(\frac{9,9 + 9,56}{2}\right) = 30,9414$

3) $\triangle ABb + \square BbFf = \square ABFf = 44,2082$

Nimmt man nun $ff' = 2,08$ als Grundlinie des abzüglichen $\triangle Fff' = \frac{9,9 \times 2,08}{2} = 10,2960$

so bleibt 33,9122

für das erste Theilstück $ABFf'$, und es ist

$Af' = Af - ff' = 5,56 - 2,08 = 3,48$

4) $\triangle Fff' + \square FfGg = \square Ff'Gg = 41,2374$

$- \triangle Ggg' = \frac{9,56 \times 1,53}{2} = 7,3134$

bleibt 33,9240

für das zweite Theilstück $Ff'Gg'$ und

$Ag' = Ag - gg' = 8,74 - 1,53 = 7,21$

Anmerkung.

Eben so verfährt man, wenn die Theilstücke nach verschiedenen Verhältnissen einzurichten sind und die Abschnitte der Seite BC denselben entsprechen sollen.

Diese Theilungsart kommt öfters in Anwendung, indem die Betheiligten sich gewöhnlich den verhältnißmäßigen Antheil an der kürzeren Seite vorbehalten, worin die Theilpunkte fallen. Vergleiche §. 35.

§. 38.

Zwölftes Beispiel.

Abtheilung der Wiese, Fig. 31, zu einer Versteigerung in Parcellen.

Aufnahme.

AF = 62°, 68, AB = 24, 08, Gg (senkrecht auf AB) = 0, 45, Ag = 5, 70, BC = 34, 33, CE = 19, 05, EF = 10, 30, Perp. Bb = 23, 75, CD = 13, 355, Ee = 3, 43, Abschnitt Ab = 3, 97, Db = 32, 72, De = 16, 28, Fe = 9, 71,

Flächeninhalt = 829$^{\square°}$, 53$^{\square'}$

Theilung.

Zu dem angegebenen Endzweck wird die Größe der Parcellen auf 40$^{\square°}$ gesetzt. Hiernach nehmen 19 Parcellen den Flächenraum von 760$^{\square°}$ ein, und es bleiben 69$^{\square°}$, 53$^{\square'}$ für die 20ste Parcelle übrig, welche bei

einem geringeren Gehalte, auch wegen ihrer spitz zulaufenden Figur, sehr unschicklich ausfallen würde.

Der Ueberblick zeigt, daß die 16 ersten Parcellen als Paralleltrapezien nach der Richtung AB in die schicklichsten Lagen fallen.

Die Berechnung derselben nach II. §. 14 erfordert

1) die Verlängerung der Seiten AD, BC des Vierecks ABCD.

Zieht man CH parallel AD, so ist BH = Bb — CD = 10,395, HC = bD = 32,72 und für

BH : Bb = HC : bT = BC : BT hat man

10,395 : 23,75 = 32,72 : bT = 34,33 : BT, woraus

da log. 23,75 — log. 10,395 = 0,3588391

log. BT = log. 34,33 = 1,5356738

+ 0,3588391

1.8945129 = l. 78,435

l. bT = l. 32,72 = 1,5148133

+ 0,3588391

1,8736524 = l. 74,76

AT = bT + Ab = 74,76 + 3,97 = 78,73, und hiernach

△ ABT = 934,91

□ ATBG = △ ABT + △ ABG = 934,91 + 5,41 = 940,32 = S

2) Die Bestimmung der parallelen Theillinien nach §. 13 und 14, wobei man

die erste Parallele IK als Seite des Triangels TIK = S — 40°°

Die zweite LM als Seite des $\triangle$ TLM = S — 2 × 40 und jede folgende als Seite eines um 40°° geringeren Dreiecks ansetzt.

3) Die Parcellen abzustecken bedürfte es nur der Theilpunkte I, K, L, M.... Für die Verification derselben, und die Beschreibung in den Flurbüchern, werden aber die sämmtlichen Umfangs- und Dimensionslinien erfordert, wie sie im Folgenden aus der Formel

$$n \sqrt{\frac{2q}{ap}} \text{ §. 13 und 14 oder } l.\, n + \frac{l.\, q - l.\, \frac{1}{2}\, ap}{2}$$

zugleich entwickelt werden. Die in die Stelle des Coefficienten hier eintretende Größen sind die Grundlinie AT = a, die Seiten AB, BT, die Perpendickel Bb = p und der Abschnitt bT

Setzt man nun für q die successiven Werthe S — 40, S — 80, S — 120 u. s. w. ferner

l. AT = l. a = 1,8961403 = A

l. Bb = l. p = 1,3756636 = B

l. ½ ap = 2,9707739 = C

l. BT = 1,8945129 = D

l. bT = 1,8736524 = E

l. AB = 1,3816565 = F

so hat man für die

Erste Parcelle.

$q = S - 40 = 940,32 - 40 = 900,32$

$$
\begin{array}{rl}
\text{l. } q = & 2,9543969 \\
- C = & 2,9707739 \\
\hline
 & 1,9836230 - 2 \\
\hline
\tfrac{1}{2}) & 0,9918115 - 1 = \text{l.}\sqrt{\dfrac{2q}{\tfrac{1}{2}ap}} = h
\end{array}
$$

$D = 1,8945129$ $\quad BT = 78,435$

$+h = 0,9918115 - 1$ $\quad - TI = 76,97$

$1,8863244 =$ $\quad 1,465 = BI$, erster

$\text{l. } 76,97 = TI$ $\quad$ oberer Abschnitt,

$A = 1,8961403$ $\quad AT = 78,73$

$+h = 0,9918115 - 1$ $\quad - KT = 77,26$

$1,8879518 =$ $\quad AK = 1,47$ erster unte-

$\text{l. } 77,26 = KT$ $\quad$ rer Abschnitt,

$F = 1,3816565$

$+h = 0,9918115 - 1$

$1,3734680 = \text{l. } 23,63 = IK$, erste Parallele,

$B = 1,3756636$

$h = 0,9918115 - 1$

$1,3674751 = \text{l. } 23,305 = Ji$, Perpendickel,

$E = 1,8736524$ $\quad bT = 74,76$

$h = 0,9918115 - 1$ $\quad - iT = 73,36$

$1,8654639 =$ $\quad 1,40 = bi$, Ab-

$\text{l. } 73,36 = iT$ $\quad$ stand der Perpendickel,

$$1{,}40 + Ab = 5{,}37 = Ai$$
$$- AK = \underline{1{,}47} \quad \text{(siehe A)}$$
$$KI = 3{,}90 \quad \text{Abscisse.}$$

Verification.

△ AGB = 5,4180

△ ABb = 47,1437

□ ABJK besteht in

Bb) 23,75

Ji) 23,305

$$\frac{47{,}055 \times 1{,}40\ (bi)}{2} = 32{,}9385$$

85,5002

— △ KJi bestehend in

$$\frac{Ji \times Ki}{2} = \frac{23{,}305 \times 3{,}90}{2} = 45{,}4447$$

erste Pareelle = 40,0555

Zweite Parcelle.

940,32	l. q = 2,9346600
— 80,—	— C = 2,9707739
q = 860,32	1,9638861 - 2
	½) 0,9819430 - 1 = h

D = 1,8945129	78,435
h = 0,9819430 — 1	— 75,24
1,8764559 = l. 75,24	3,195 = BL
	— 1,465 = BJ (D. I)
	1,73 = IL oberer Abschnitt.

A = 1,8961403
h = 0,9819430 — 1
1,8780833 = l. 75,525

78,73
— 75,525
3,205 = AM
— 1,47 = AK (A. I.)
1,735 = KM, unterer Abschnitt,

F = 1,3816565
h = 0,9819430 — 1
1,3635995 = l. 23,10, Parallele,

B = 1,3756636
h = 0,9819430 — 1
1,3576066 = l. 22,78, Perpendickel,

E = 1,8736524
h = 0,9819430 — 1
1,8555954 = l. 71,715

74,76
— 71,715
3,045
— 1,40 (E. I.)
1,645 Abstand der Perpendickel,

78,73
— 71,715
7,015
— 3,205 (A. II.)
3,810 Abscisse.

Verification.

△ ABb = 45,4447
□ KILM = 37,9049
83,3496

$- \triangle \frac{(22,78 \times 3,81)}{2} = 43,3959$

zweite Parcelle = 39,9537

Dritte Parcelle.

q = 940, 32 — 120	l. q = 2, 9139833
= 820, 32	— c = 2, 9707739
	1, 9432094-2
	½) 0, 9716047-1 = h
D = 1,8945129	78,435
0,9716047 — 1	— 73,47
1,8661176 = l. 73,47	4,965
	— 3,195 (D. II.)
	1,77 oberer Abschnitt,
A = 1,8961403	78,73
0,9716047 — 1	— 73,75
1,8677450 = l. 73,75	4,98
	— 3,205 (A. II.)
	1,775 unterer Abschn.
F = 1,3816565	
0,9716047 — 1	
1,3532612 = l. 22,555, Parallele,	
B = 1,3756636	
0,9716047 — 1	
1,3472683 = l. 22,25, Perpendickel,	
E = 1,8736524	74,76
0,9716047 — 1	— 70,025
1,8452571 = l. 70,025	4,735
	— 3,045 (E. II.)
	1,69 Abstand der Perpendickel.

78,73
− 70,025
8,705
− 4,98 (A. III.)
3,725 Abscisse.

Flächeninhalt 40□° —

Vierte Parcelle.

q = 940,32 — 160
= 780,32

l. q = 2,8922727
— c = 0,9707739
1,9214988 — 2
½) 0,9607494 — 1

D = 1,8945129
0,9607494 — 1
1,8552623 = l. 71,66

78,435
— 71,66
6,775
— 4,965 (D. III.)
1,81 oberer Abschnitt.

A = 1,8961403
0,9607494 — 1
1,8568897 = l. 71,93

78,73
— 71,93
6,80
— 4,98 (A. III.)
1,82 unterer Abschnitt,

F = 1,3816565
0,9607494 — 1
1,3424059 = l. 22, Parallele,

B = 1,3756636
0,9607494 — 1
1,3364130 = l. 21,70, Perpendickel,

E = 1,8736524
0,9607494 — 1
1,8344018 = l. 68,30

78,73
— 68,30
10,43
— 6,80 (A. IV.)
3,63 Abscisse.

74,76
— 68,30
6,46
— 4,735 (E. III.)
1,725 Abstand der Perpendickel.

Flächeninhalt 39, 96

Fünfte Parcelle.

q = 940,32 — 200
= 740,32

l. q = 2,8694195
— C = 2,9707739
1,8986456 — 2
½) 0,9493228 — 1

D = 1,8945129
0,9493228 — 1
0,8438357 = l. 69,795

78,435
— 69,795
8,64
— 6,775 (D. IV.)
1,865 oberer Abschn.

A = 1,8961403
0,9493228 — 1
1,8454631 = l. 70,06

78,73
— 70,06
8,67
— 6,80 (A. IV.)
1,87 unterer Abschn.

F = 1,3816565
0,9493228 — 1
1,3309793 = l. 21. 43, Parallele,

B = 1,3756636
   0,9493228 — 1
   1,3249864 = l. 21, 135, Perpendickel,

E = 1,8736524
   0,9493228 — 1
   1,8229752 = l. 66,525

74,76
— 66,525
8,235
— 6,46 (E. IV.)
1,775 Abst. der Perp.

78,73
— 66,525
12,205
— 8,67
3,535

Flächeninhalt 40, 04

Sechste Parcelle.

q = 940, 32 — 240
= 700, 32

l. q = 2,8452965
— C = 2,9707739
1,8745226 — 2
½) 0,9372613 — 1

D = 1,8945129
   0,9372613 — 1
   1,8317742 = l. 67,885

78,435
— 67,885
10,55
— 8,64
1,91 oberer Abschnitt

A = 1,8961403
   0,9372613 — 1
   1,8334016 = l. 68,14

78,73
— 68,14
10,59
— 8,67
1,92 unterer Abschn.

F = 1,3816565
0,9372613 — 1
1,3189178 = l. 20,84, Parallele,

B = 1,3756636
0,9372613 — 1
1,3129249 = l. 20,555, Perpendickel,

E = 1,8736524
0,9372613 — 1
1,8109137 = l. 64,70

74,76
— 64,70
10,06
— 8,235
1,825 Abst. der Perp.

78,73
— 64,70
14,03
— 10,59
3,44 Abscisse.

Flächeninhalt 40,04

Siebente Parcelle.

q = 940,32 — 280
= 660,32

l. q = 2,8197545
— C = 2,9707739
1,8489806 — 2
½) 0,9244903 — 1

D = 1,8945129
0,9244903 — 1
1,8190032 = l. 65,92

78,435
— 65,92
12,515
— 10,55
1,965 oberer Abschn.

A = 1,8961403	78,73
0,9244903 — 1	— 66,165
1,8206306 = l.66,165	12,565
	— 10,59
	1,975 unterer Abschn.

F = 1,3816565
0,9244903 — 1
1,3061468 = l. 20,24, Parallele,

B = 1,3756636
0,9244903 — 1
1,3001539 = l. 19,96, Perpendickel,

E = 1,8736524	74,76
0,9244903 — 1	— 62,825
1,7981427 = l.62,825	11,935
	— 10,06
	1,875 Abst. der Perp.

78,73
— 62,825
15,905
— 12,565
3,34 Abscisse. Flächeninhalt 40,05

Achte Parcelle.

q = 940,32 — 320	l. q = 2,7926158
= 620,32	— C = 2,9707739
	1,8218419 — 2
	½) 0,9109209 — 1

D = 1,8945129		78,435	
0,9109209 — 1		— 63,89	
1,8054338	= l. 63,89	14,545	
		— 12,515	
		2,03	oberer Abschnitt,
A = 1,8961403		78,73	
0,9109209 — 1		— 64,13	
1,8070612	= l. 64,13	14,60	
		— 12,565	
		2,035	unterer Abschn.

F = 1,3816565
0,9109209 — 1
1,2925774 = l. 19,615, Parallele,

B = 1,3756636
0,9109209 — 1
1,2865845 = l. 19,345, Perpendickel,

E = 1,8736524		74,76	
0,9109209 — 1		— 60,895	
1,7845733	= l. 60,895	13,865	
		— 11,935	
		1,93	Abst. der Perp.

78,73
— 60,895
17,835
— 14,60
3,235 Abscisse. Flächeninhalt 40,06

Neunte Parcelle.

q = 940,32 — 360	l. q = 2,7636675
= 580,32	— C = 0,9707739
	1,7928936 — 2
	½) 0,8964468 — 1
D = 1,8945129	78,435
0,8964468 — 1	— 61,795
1,7909597 = l. 61,795	16,64
	— 14,545
	2,095 oberer Abschnitt,
A = 1,8961403	78,73
0,8964468 — 1	— 62,03
1,7925871 = l. 62,03	16,70
	— 14,60
	2,10 unterer Abschnitt,
F = 1,3816565	
0,8964468 — 1	
1,2781033 = l. 18,97, Parallele,	
B = 1,3756636	
0,8964468 — 1	
1,2721104 = l. 18,71, Perpendickel,	
E = 1,8736524	74,76
0,8964468 — 1	— 58,90
1,7700992 = l. 58,90	15,86
	— 13,865
	1,995 Abst. der Perp.

	78,73	
—	58,90	
	19,83	
—	16,70	
	3,13	Flächeninhalt 39,87

Zehnte Parcelle.

q = 940,32 — 400	l. q = 2,7326510
= 540,32	— C = 2,9707739
	1,7618771 — 2
	½) 0,8809385 — 1
D = 1,8945129	78,435
0,8809385 — 1	— 59,63
1,7754514 = l. 59,63	18,805
	— 16,64
	2,165 oberer Abschnitt,
A = 1,8961403	78,73
0,8809385 — 1	— 59,85
1,7770788 = l. 59,85	18,88
	16,70
	2,18 unterer Abschn.

F = 1,3816565
0,8809385 — 1
1,2625950 = l. 18,305, Parallele,

B = 1,3756636
0,8809385 — 1
1,2566021 = l. 18,055, Perpendickel,

E = 1,8736524 | 74,76
0,8809385 — 1 | — 56,83
1,7545909 = l. 56,83 | 17,93
— 15,86
2,07 Abst. der Perp.

78,73
— 56,83
21,90
— 18,88
3,02 Abscisse. Flächeninhalt 40,07

Eilfte Parcelle.

q = 940,32 — 440 | l. q = 2,6992479
= 500,32 | — C = 2,9707739
1,7284740 — 2
½) 0,8642370 — 1

D = 1,8945129 | 78,435
0,8642370 — 1 | — 57,38
1,7587499 = l. 57,38 | 21,055
— 18,805
2,25 oberer Abschnitt,

A = 1,8961403 | 78,73
0,8642370 — 1 | — 57,595
1,7603773 = l. 57,595 | 21,135
— 18,88
2,255 unterer Abschn.

$$F = 1{,}3816565$$
$$0{,}8642370 - 1$$
$$1{,}2458935 = l.\ 17{,}615,$$ Parallele,

$$B = 1{,}3756636$$
$$0{,}8642370 - 1$$
$$1{,}2399006 = l.\ 17{,}375,$$ Perpendickel,

$$E = 1{,}8736524$$
$$0{,}8642370 - 1$$
$$1{,}7378894 = l. 54{,}69$$

74,76
— 54,69
20,07
— 17,93
2,14 Abst. der Perp.

78,73
— 54,69
24,04
— 21,135
2,905 Abscisse.

Flächeninhalt 39,97

Zwölfte Parcelle.

$$q = 940{,}32 - 480 = 460{,}32$$

$$l.\,q = 2{,}6630598$$
$$-C = 2{,}9707739$$
$$1{,}6922859 - 2$$
$$\tfrac{1}{2})\ 0{,}8461429 - 1$$

$$D = 1{,}8945129$$
$$0{,}8461429 - 1$$
$$1{,}7406558 = l. 55{,}035$$

78,435
— 55,035
23,40
— 21,055
2,345 oberer Abschn.

A = 1,8961403
0,8461429 — 1
1,7422832 = l. 55,245

78,73
— 55,245
23,485
— 21,135
2,35 unterer Abschn.

F = 1,3816565
0,8461429 — 1
1,2277994 = l. 16,895, Parallele,

B = 1,3756636
0,8461429 — 1
1,2218065 = l. 16,665, Perpendickel,

E = 1,8736524
0,8461429 — 1
1,7197953 = l. 52,455

74,76
— 52,455
22,305
— 20,07
2,235 Abst. der Perp.

78,73
— 52,455
26,275
— 23,485
2,79 Abscisse.

Flächeninhalt 40° —

Dreizehnte Parcelle.

q = 940,32 — 520
= 420,32

l. q = 2,6235801
— C = 2,9707739
1,6528062 — 2
½) 0,8264031 — 1

D = 1,8945129	78,435
0,8264031 — 1	— 52,59
1,7209160 = l. 52,59	25,845
	— 23,40
	2,445 oberer Abschn.

A = 1,8961403	78,73
0,8264031 — 1	— 52,79
1,7225434 = l. 52,79	25,94
	— 23,485
	2,455 unterer Abschn.

F = 1,3816565
0,8264031 — 1
1,2080596 = l. 16, 145, Parallele,

B = 1,3756636
0,8264031 — 1
1,2020667 = l. 15, 925, Perpendickel,

E = 1,8736524	74,76
0,8264031 — 1	— 50,125
1,7000555 = l. 50,125	24,635
	— 22,305
	2,33 Abst. der Perp.

78,73
— 50,125
28,605
— 25,94
2,665 Abscisse.

Flächeninhalt 39,99

Vierzehnte Parcelle.

q = 940,32 — 560	l. q = 2,5801492
= 380,32	— C = 2,9707739
	1,6093753 — 2
	½) 0,8046876 — 1
D = 1,8945129	78,435
0,8046876 — 1	— 50,025
1,6992005 = l. 50,025	28,41
	— 25,845
	2,565 oberer Abschn.
A = 1,8961403	78,73
0,8046876 — 1	— 50,215
1,7008279 = l. 50,215	28,515
	— 25,94
	2,575 unterer Abschn.
F = 1,3816565	
0,8046876 — 1	
1,1863441 = l. 15,36, Parallele,	
B = 1,3756636	
0,8046876 — 1	
1,1803512 = l. 15, 15, Perpendickel,	
E = 1,8736524	74,76
0,8046876 — 1	— 47,68
1,6783400 = l. 47,68	27,08
	— 24,635
	2,445 Abst. der Perp.

```
    78,73
 — 47,68
   -----
   31,05
 — 28,515
   -----
    2,535 Abscisse.        Flächeninhalt 40 —
```

Fünfzehnte Parcelle.

```
q = 940,32 — 600          l. q = 2,5318875
  = 340,32                — C = 2,9707739
                                ---------
                                1,5611136 — 2
                                ---------
                          ½) 0,7805568 — 1

D = 1,8945129                 78,435
    0,7805568 — 1          — 47,32
    ---------                 ------
    1,6750697 = l. 47,32      31,115
                           — 28,41
                              ------
                               2,705 oberer Abschn.

A = 1,8961403                 78,73
    0,7805568 — 1          — 47,50
    ---------                 ------
    1,6766971 = l. 47,50      31,23
                           — 28,515
                              ------
                               2,715 unterer Abschn.

F = 1,3816565
    0,7805568 — 1
    ---------
    1,1622133 = l. 14, 525, Parallele,

B = 1,3756636
    0,7805568 — 1
    ---------
    1,1562204 = l. 14, 33, Perpendickel,
```

E = 1,8736524
0,7805568 — 1
1,6542092 = l. 45,105

74, 76
— 45, 105
29, 655
— 27, 08
2, 575 Abſt. der Perp.

78, 73
— 45, 105
33, 625
— 31, 23
2, 395 Abſciſſe.

Flächeninhalt 40 —

Sechszehnte Parcelle.

q = 940, 32 — 640
= 300, 32

l. q = 2,4775843
— C = 2,9707739
1,5068104 — 2
½) 0,7534052 — 1

D = 1,8945129
0,7534052 — 1
1,6479181 = l. 44,455

78, 435
— 44, 455
33, 98 = BN
— 31, 115
2, 865 oberer Abſchn.

A = 1,8961403
0,7534052 — 1
1,6495455 = l. 44,62

78, 73
— 44, 62
34, 11 = AO
— 31, 23
2, 88 unterer Abſchn.

$$F = 1{,}3816565$$
$$\frac{\quad 0{,}7534052 - 1}{1{,}1350617} = l.\ 13{,}65 = NO$$

$$B = 1{,}3756636$$
$$\frac{\quad 0{,}7534052 - 1}{1{,}1290688} = l.\ 13{,}46 = Nn$$

$$E = 1{,}8736524$$
$$\frac{\quad 0{,}7534052 - 1}{1{,}6270576} = l.42{,}37$$

$$\begin{array}{r} 74{,}76 \\ -\ 42{,}37 \\ \hline 32{,}39 \end{array} = bn$$
$$\begin{array}{r} -\ 29{,}655 \\ \hline 2{,}735 \end{array}$$ Abst. der Perp.

$$\begin{array}{r} 78{,}73 \\ -\ 42{,}37 \\ \hline 36{,}36 \end{array} = An$$
$$\begin{array}{r} -\ 34{,}11 \\ \hline 2{,}25 \end{array} = On$$

Flächeninhalt 40, 02

Siebenzehnte Parcelle.

$$\triangle ONn = \frac{Nn \times On}{2} = \frac{13{,}46 \times 2{,}25}{2} = 15{,}1425$$

$$nD = bD - bn = 0{,}33$$

$$\square DCNn = \frac{Nn + CD \times Dn}{2} = \frac{26{,}815 \times 0{,}33}{2}$$
$$= \begin{array}{r} 4{,}4244 \\ \hline 19{,}5669 \end{array}$$

Nimmt man dabei Dp = 2,10, so ist für diese Entfernung, der Perp. Pp = 12,075, und daher □ CPpD = 26,7015

macht mit dem Vorgehenden 46,2684

und subtrahirt man davon

$\triangle pPQ = \frac{Pp \times Qp}{2} = \frac{12,075 \times 1,03}{2}$ . . . 6,2186

so bleibt die siebenzehnte Parcelle = 40,0498

Achtzehnte Parcelle.

$\triangle$ pPQ nach obigem = 6,2186

$\square\ PpRS = \frac{Pp + RS}{2} \times pS$

$= \frac{12,075 + 10,22}{2} \times 3,04 =$ 33,8884

40,1070

Neunzehnte Parcelle.

$\square\ RSUV = \frac{RS + UV}{2} \times SV$

$= \frac{10,22 + 7,455}{2} \times 4,54 =$ 40,1222

Zwanzigste Parcelle.

□ UVEe = 35,9205

△ EeF = 33,3053

69,2258

§. 39.

Dreizehntes Beispiel, Fig. 32.

□ ABDC ist vermittelst der Grundlinien AB = 50,30 und der Coordinaten Cc = 8, Ac = 2, Dd = 12, Bd = 0,60 gegeben, man verlangt die Coordinaten der Punkte E, F, worin die Verlängerungen der Seiten AC, BD, von EF parallel CD geschnitten werden, um das Trapez CE FD = $323^{\square°}\ 75^{\square'}$ = q anzulegen.

Für die Berechnung nach der Formel §. 8. ist

$$Ee' = n = \frac{a - \frac{1}{2}\beta s - \sqrt{(a - \frac{1}{2}\beta s)^2 - 2sq}}{s}$$

$$s = \frac{Ac}{Cc} + \frac{Bd}{Dd} = 0,25 + 0,05 = 0,30;$$

CC′ parallel AB, ist die Grundlinie a, und wegen der Höhe Cc = 8, ist

$$a = AB - 8.\ s = 50,30 - 2,40 = 47,90.$$

Ferner ist $\beta = Dd' = Dd - Cc = 12 - 8 = 4.$

$a - \frac{1}{2}\beta s = 47,30,\qquad 2sq = 194,25$

$$\sqrt{(a - \frac{1}{2}\beta s)^2 - 2sq} = \sqrt{2237,29 - 194\,25} = \sqrt{2043,04} = 45,20$$

$$Ee' = n = \frac{47,30 - 45,20}{0,30} = \frac{2,1}{0,3} = 7 \text{ daher}$$

$$Ee = 7 + 8 = 15,\ Ae = 15.\ \frac{Ac}{Cc} = 15 \times 0,25 = 3,75.$$

$$Ff = Ee + Dd' = 15 + 4 = 19.\ Bf = 19 \times 0,05 = 0,95$$

Berechnung des Inhalts nach §. 16.

$$\begin{array}{l} 50,30 \\ -\ 3,75 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{46,55 \times 19}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots = 442,2250$$

$$\begin{array}{l} 50,30 \\ -\ 0,95 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{49,35 \times 15}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots = 370,1250$$

$$\square\ AEFB = 812,3500$$

hiervon ab

$$\begin{array}{l} 50,30 \\ -\ 2,- \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{48,30 \times 12}{2} \ldots = 289,80$$

$$\begin{array}{l} 50,30 \\ -\ 0,60 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{49,70 \times 8}{2} \ldots = 198,80$$

$$\square\ ACDB = 488,60 = 488,6000$$

$$\square\ CEFD = 323,75$$

§. 40.

Will man, zur Anwendung der vorgehenden Aufgabe, aus den gegebenen Coordinaten der Punkte E und F, die Parallelseite CD des Trapez CDEF bestimmen, so ist für die Berechnung nach der Formel §. 8.

$$Ee' = n = \frac{-\left(a + \tfrac{1}{2}\beta s\right) + \sqrt{\left(a + \tfrac{1}{2}\beta s\right)^2 + 2sq}}{s}$$

$s = 0,30$

$a = Ff'$ (parallel AB) $= 50,30 - 19 \cdot s = 50,3 - 5,7$

$= 44,6$

$\beta = Ff - Ee = 19 - 15 = 4$

$\frac{1}{2} \beta s = 0,6$

$a + \frac{1}{2} \beta s = 44,6 + 0,6 = 45,2$

$(a + \frac{1}{2} \beta s)^2 = 2043,04$

$+ 2sq = 194,25$

$2237,29$

$\sqrt{2237,29} = 47,3$

$-(a + \frac{1}{2} \beta s) = 45,2$

$2,1$, wie zuvor also

$$n = \frac{2,1}{0,3} = 7 = Ee'$$

$Cc = Ee - n = 15 - 7 = 8 \quad Dd = Ff - n = 19 - 7 = 12$

$Ac = 0,25 \times 8 = 2 \quad Bd = 0,05 \times 12 = 0,6$

§. 41.

Unter allen vierseitigen Figuren ist das regelmäßig Viereck die schicklichste, die man einem Grundstück geben kann; sie schließt den größten Flächenraum in denselben Umfang ein, und eignet sich zu jeder landwirthschaftlichen Benutzung.

Je größer der Unterschied der Endbreiten, oder der Höhen Ee, Ff des Feldes AEFB Fig. 32, desto weniger ist es zum Pflügen, zu Baumpflanzungen und anderen regelmäßigen Anlagen geschickt. Schneidet man das Trapez ACC'B davon ab, so wird die Differenz

der Breiten ungetheilt auf das obere Stück übergehen, und die Symmetrie desselben, nach Verhältniß der geringeren Fläche, noch schlimmer bestellt seyn. Um keins der beiden Stücken zum Nachtheil des andern anzulegen, müßte man also die Differenz ihrer Endbreiten auch mit ihren Flächenräumen in Verhältniß bringen, und hierzu wird das folgende Verfahren wohl das einfachste seyn.

Man theilt Fig. 33, um das Feld ABCD in drei gleiche Stücke abzutheilen, die Seiten AB, CD vorläufig in drei gleiche Abschnitte AE, EG, GB und DF, FA, AC. Von den zwischenliegenden Flächenräumen ist der mittlere genau ein Drittheil des Ganzen, der untere größer und der obere so viel kleiner. Subtrahirt man also den Ueberschuß des unteren, vermittelst der Theillinie IK, parallel EF, und addirt man das Fehlende zu dem Oberen durch die Theillinie LM parallel GH, so wird die Differenz der Breiten zugleich mit dem Flächenraum in gleiche Theile getheilt.

Dieses ausführlich zu erläutern, sind die folgenden Beispiele bestimmt. In den gewöhnlich vorkommenden Fällen wird das Verfahren §. 32, 35, 37 in dieser Absicht schon hinlänglich seyn, den Geometer außer Verantwortung zu setzen.

§. 42.

Vierzehntes Beispiel.

In dem vorliegenden Felde, Fig. 33, bestimmt die Richtung eines durchziehenden Feldwegs, woran

jeder Interessent den natürlichen Antheil erhält, die Richtung der Theilstücke.

Die gegebenen Größen sind

AD = 50°,30 AB = 43,29 CD = 54, 07

Ab = 10,50, Bb = 42° —

Dc = 2°,70, Cc = 54° —

wonach □ ABCD = 2074″° 20″′

$\frac{Ab}{Bb} = 0,25$

$\frac{Dc}{Cc} = 0,05$

s = 0,30

und die entsprechenden Coordinaten der Theilpunkte E, G, F, H, §. 41. sind

Ee = $\frac{1}{3}$ Bb = 14 — Ae = $\frac{1}{3}$ Ab = 3,5

Gg = $\frac{2}{3}$ Bb = 28 — Ag = $\frac{2}{3}$ Ab = 7

Ff = $\frac{1}{3}$ Cc = 18 — Df = $\frac{1}{3}$ Dc = 0,90

Hh = $\frac{2}{3}$ Cc = 36 — Dh = $\frac{2}{3}$ Dc = 1,80

wonach □ AEFD = 767 —

hiervon ab

□ EGHF = $\frac{1}{3}$ ABCD = 691, 40

bleibt 75, 60 für den Inhalt der Trapezien EFKI und GHML

und zur Bestimmung derselben nimmt man in Anwendung der Formel §. 39. und 40

I.

Für die Coordinaten der Punkte L, M

s = 0,30, q = 75,60

$\beta = Gg' = Hh - Gg = 36 - 28 = 8$ —

$a = Hh' = 50,30 - 36.s = 50,30 - 10,80 = 39,50$

$$(a + \tfrac{1}{2}\beta s)^2 = (40,70)^2 = 1656,49$$
$$+ 2sq = 45,36$$
$$\sqrt{1701,85} = 41,2535$$
$$-(a + \tfrac{1}{2}\beta s) = 40,7000$$
$$0,5535$$

daher $n = \frac{0,5535}{0,30} = 1,845$ und

$Mm = Hh - 1,845 = 34,155$, $Ll = Gg - 1,845 = 26,155$

$Dm = 0,05\ Mm = 1,71$ $Al = 0,25\ Ll = 6,54$

II.

Für die Coordinaten der Punkte I, K

s und q wie in I

$a = Ff' = 50,30 - 18.s = 50,30 - 5,40 = 44,90$

$\beta = Ee' = 18 - 14 = 4$ —

$$(a + \tfrac{1}{2}\beta s)^2 = (45,50)^2 = 2070,25$$
$$+ sq = 45,36$$
$$\sqrt{2115,61} = 45,9957$$
$$-(a + \tfrac{1}{2}\beta s) = 45,5000$$
$$0,4957$$

$n = \frac{0,4957}{0,30} = 1,65$ $Kk = Ff - 1,65 = 16,35$

$Ji = Ee - 1,65 = 12,35$

$DK = 0,05\ Kk = 0,82$ $Ai = 0,25\ Ji = 3,09$

§. 43.

Noch genauer zu verfahren, müßte man bei der Abgleichung der Flächenräume §. 41. 42. auch die durch-

ziehenden Theile des Weges mit in Rechnung bringen. Nur in Ansehung der Trapezien EFKI und GHML wird die Differenz derselben immer zu gering seyn, als daß sie in Anschlag kommen dürfte. An ihre Betrachtung reiht sich die folgende Aufgabe:

Von dem Felde ABCD, wodurch der Weg RT Fig. 24. führt, ein Trapez ANMD abzuschneiden, welches den bestimmten Theil Q an urbarem Lande halte.

Der einschließliche Theil des Weges ist ein Parallelogram RV, dessen Grundlinie $RW = b$ gegeben ist, dessen Höhe die gesuchte Höhe n der Parallele NM, und dessen Fläche hiernach $= bn$ ist.

Nun soll $q + bn = \square ANMD = an - \frac{1}{2} sn^2$ seyn §. 1. oder $q = an - \frac{1}{2} sn^2 - bn$

$$n^2 + 2n \frac{b-a}{s} + \frac{(a-b)^2}{s^2} = \frac{(a-b)^2 - 2sq}{s^2}, \text{ woraus}$$

$$Mm = n = \frac{a - b - \sqrt{(a-b)^2 - 2sq}}{s}$$

$$NM = t = b + \sqrt{(a-b)^2 - 2sq} \quad (\text{§. 1.})$$

Es soll z. B. das obige Viereck, wozu $RT = 31,55$ als die Fläche des Weges, $RW = 1,415$ der Einschnitt desselben, und die übrige Bestimmung §. 28. gegeben ist, zur Hälfte des urbaren Landes abgetheilt werden.

Hier nimmt man

$$q = \square ABCD + \square RT$$

$$= \frac{1359,84 - 31,55}{2} = \frac{1328,29}{2} = 664,1450$$

$a = 64,50$

$a - b = 63,085 \quad (a - b)^2 = 3979,7173$

$s = 0,2446$

$2sq = 324,90$

$$\sqrt{(a-b)^2 - 2sq} = \sqrt{3654,8173} = 60,455$$

$$+\,b \quad = \underline{1,415}$$

$$61,87 = NM = t$$

$$\frac{a-t}{s} = \frac{64,50-61,87}{0,2446} = \frac{2,63}{0,2446} = 10,752 = Mm = n$$

Verification.

$$\square\, ANMD = \frac{64,50+61,87}{2}\; 10,752 = 679,36$$

$$-\square\, RV = 1,415 \times 10,752 \quad = \underline{15,21}$$

$$664,15$$

§. 44.

Anmerkung.

Es versteht sich, daß die Gleichung $n = \frac{2q}{a+t}$ im Vorgehenden nicht anwendbar ist, wo q die Fläche des Trapez ANMD nicht ausdrückt.

Der Weg RT §. 43. hat 1° an senkrechter Breite, die Seite RS 31,535, und WT 31,575 an Länge; daher die Fläche 31°°, 55°′, die sich auch aus den folgenden Angaben bestimmen läßt.

AR = 24,325 AW = 25,74
BS = 44,33 BT = 45,775 BC = 59,11

wornach die Coordinaten

SS′ = RS′ = 22,30
TT′ = WT′ = 22,33 sehr nahe, und
S′T′ = 1,445

§. 45.

Fünfzehntes Beispiel.

Symmetrische Theilung des Feldes ABCD Fig. 34. in 20 gleiche Theile (§. 40.) gegeben, AD = 64,64 Ab = 10,18 Bb = 30,25 Dc = 2,42 Cc = 22,19 BC = 52,66 wonach

BG = Bb — Cc = 8,06 GC = bc = 52,04

$$\frac{BG}{GC} = s = \frac{8,06}{52,04}$$

$$\square ABCD = 1545,3112 \quad \frac{\square ABCD}{20} = 77,2655 = P.$$

Vorbereitung.

I.

1) Man theilt die Seite BC in 20 gleiche Theile, aus den Theilungspunkten F, M u. s. w. fällt man, wie in Fig. 35. ersichtlich, die Perpendickel Ff, Mm u. s. w., wodurch auch GC der Abstand der Perpendickel Cc, Bb in 20 gleiche Theile getheilt wird, wie

CE, EO u. s. w., und zieht die Verbindungslinien Fe, Mo u. s. w.

Nimmt man aber, der bequemeren Rechnung wegen, $CE = \frac{GC}{20} = 2°,6 = \beta$, so ist der entsprechende Abschnitt CF = 2, 631

$2\beta = 5,2$ die Entfernung des 2ten Theilpunkts O, von C

$3\beta = 7,8$ 3

$4\beta = 10,4$ 4

$5\beta = 13$ — 5

u. s. w.

2) Aus β und s ergibt sich nach §. 6. die Differenz der Perpendickel Cc, Ff, Mm . . . . Man hat

$\log. s = l. \frac{8,06}{52,04} = 0,1899977 - 1$

$+ l. \beta$ . . . . $0,4149733$

$l. \beta s$ (Differenz) $= 0,6049710 - 1 = l. 0,4027$

folglich der 1te Perpend. $Ff = a + \beta s = Cc + \beta s$

$= 22,19 + 0,4027 = 22,593$

2te $= a + 2\beta s = 22,995$

3te $= a + 3\beta s = 23,398$

4te $= a + 4\beta s = 23,800$

5te $= a + 5\beta s = 24,203$ u. s. w.

3) Ist die 1te Abscisse $fe = Df - De = Dc + CE - De$

$= 2,42 + 2,60 - 3,23 = 1,79$

die 2te $mo = Dm - Do = 2,42 + 5,20 - 6,46 = 1,16$

die 3te $= 2,42 + 7,80 - 9,69 = 0,53$

die 4te $= 2,42 + 10,40 - 12,92 = -0,10$,

wo das negative Zeichen, so wie auch im folgenden anzeigt, daß die Perpendickel rückwärts fallen.

die 5te = 2,42 + 13 − 16,15 = − 0,73 u. s. w.

II.

Man verlängert BC und AD bis zum Durchschnitt in T vermittelst der Analogien

BG : Bb = GC : bT = BC : BT

8,06 : 30,25 = 52,04 : bT = 52,66 : BT

wonach bT = 195,31

abgezogen bD = 54,46

bleibt 140,85 = TD, und hiernach ist.

1) die Entfernung des 1ten Theilpunkts e von T, oder

Te = TD + De = 140,85 + 3,23 = 144,08

die Entfernung des 2ten Theilpunkts = 140,85 + 6,46 = 147,31

des 3ten = 140,85 + 9,69 = 150,54

des 4ten = 140,85 + 12,92 = 153,77

des 5ten = 140,85 + 16,15 = 157 —

u. s. w.

2) BT = 197,64

− BC = 52,66

144,98 = TC und

TF = TC + CF = 144,98 + 2,631 = 147,611 und

die Entfernung des 2ten Theilpunkts = 150,242

3ten . . . . . = 152,873

4ten . . . . . = 155,504

5ten . . . . . = 158,135

u. s. w.

3) $\triangle CTD = \frac{140,85 \times 22,19}{2} = 1562,73 = \triangle$ und

$\triangle + P = 1562,73 + 77,2655 = 1640^{\square\circ}$ —
$\triangle + 2P$ 1717,26
$\triangle + 3P$ 1794,52
$\triangle + 4P$ 1871,79
$\triangle + 5P$ . . . . 1949,06 u. s. w.

4) Aus den bekannten Seiten Te, TF und den Coordinaten Ff, fe des $\triangle$ TFe ergibt sich nun nach I. §. 14. das ähnliche Dreieck $TF'e' = \triangle + P$, mit der Seite F′e′ parallel Fe, und hieraus $\square CDF'e' = P$ vermittelst der Formel $n = \sqrt{\frac{2q}{ap}}$ oder $l.\,n + \frac{l.\,2q - l.\,ap}{2}$, wofür man $Q. = l.\,q. = l.\,(\triangle + P)$ aus II. N. 3. zu nehmen hat, ferner
$A = l.\,a = l.\,Te$ aus II. N. 1.
$B = l.\,p. = l.\,Ff$ aus I. N. 2.
$C = l.\,TF$ aus II. N. 2. für die Substitution in n
$D = l.\,fe$ aus I. N. 3.

Eben so ergibt sich die 2te Parcelle $F'e'M'o' = P$ aus $TM'o' = \triangle + 2P$ durch das ähnliche $\triangle$ TMO und sofort jede folgende Parcelle vermittelst der Logarithmen Q, A, B, C, D der successiven Größen, II. N. 3. II. N. 1. I. N. 2. II. N. 2. I. N. 3., wie die nachstehende ausführliche Berechnung zeigt.

I. Parcelle.

Q=△+P=1640 l.Q.=3,2148438

ab l.2=0,3010300

A=2,158 6037(II.N.1.1.) 3,5158738

B=1,353 9739 (I. N.2.1.)

3,5125776

0,0032962

½) 0,0016481=l.√2q/ap=L

A=2,1586037

L=0,0016481

2,1602518=l.144,63=Te'

— 140,85=TD

3,78=De' Erster Abschn. von AD

C=2,1691187 (II. N. 2. 1.)

L=0,0016481

2,1707668=l.148,175

— 144, 98=TC

3,195=CF Erster Abschn. von BC

B=1,3539739

L=0,0016481

1,3556220=l.22.68=Ff' Perpendickel

D=0,2528530 (I. N. 3. 1.)

L=0,0016481

0,2545011=l.1.795=f' e' Abscisse

Abstand der Perp. Cc und Ff'=3,78+1,795—2,42

=3,155

Verification.

$$\triangle DCc = 26{,}8499$$

$$\square CcF'f' = \frac{22{,}19 + 22{,}68}{2} \times 3{,}155 = 70{,}7824$$

$$97{,}6323$$

$$-\triangle F'fe' = \frac{22{,}68 \times 1{,}795}{2} = 20{,}3553$$

1te Parcelle $CDF'f' = 77{,}2770$

II. Parcelle.

$Q = \triangle + 2P = 1717{,}26 \quad l.\,Q = 3{,}2348361$

$l.\,2 = 0{,}3010300$

$3{,}5358661$

$A = 2{,}1682322$ (II. N. 1. 2.)

$B = 1{,}3616334$ (I. N. 2. 2.) $\quad - 3{,}5298656$

$0{,}0060005$

$\frac{1}{2}$) $0{,}0030002 = L$

$A = 2{,}1682322$

$0{,}0030002$

$2{,}1712324 = l.\,148{,}33$

$-140{,}85$

7,48 Entfernung des 2ten Theilspunkts in AD

− 3,78 (A. I.)

3,70 zweiter Abschnitt in AD

$C = 2{,}1767914$ (II. N. 2. 2.)

$0{,}0030002$

$2{,}1797916 = l.\,151{,}285$

$-144{,}98$

6,305 zweiter Theilpunkt in BC

− 3,195 (C. I.)

3,11 zweiter Abschnitt in BC

B = 1,3616334
0,0030002
1,3646336 = l. 23,155 Perp.

D = 0,0644580
0,0030002
0,0674582 = l. 1,17 Abscisse.

Abstand der Perp. = 3,075

Verification.

△ Ff′e′ = 20,3553 siehe I. Parcelle
□ Ff′M′m′ = 70,4713
90,8266
= △ M′m′o′ = 13,5456
Zweite Parcelle = 77,2810

III. Parcelle.

Q = 1794,52 l. Q = 3,2539483
l. 2 = 0,3010300
3,5549783

A = 2,1776519
B = 1,3691787
3,5468306
0,0081477
½) 0,0040738

A = 2,1776519
0,0040738
2,1817257 = l. 151,96
— 140,85
11,11 Theilpunkt in AD
7,48
3,63 Abschnitt in AD

$$
\begin{array}{l}
C = 2{,}1843308 \\
\quad 0{,}0040738 \\
\hline
\quad 2{,}1884046 = \text{l. } 154{,}315 \\
\qquad\qquad\qquad - 144{,}\ 98 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 9{,}335 \text{ Theilpunkt in BC} \\
\qquad\qquad\qquad - 6{,}\ 31 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 3{,}025 \text{ Abschnitt}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
B = 1{,}3691787 \\
\quad 0{,}0040738 \\
\hline
\quad 1{,}3732525 = \text{l. } 23{,}62 \text{ Perp.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
D = 0{,}7242759 - 1 \\
\quad 0{,}0040738 \\
\hline
\quad 0{,}7283497 - 1 = \text{l. } 0{,}535 \text{ Abscisse}
\end{array}
$$

Abstand der Perp. = 2,995

Verification.

$$
\begin{array}{rl}
\triangle = & 13{,}5456 \text{ siehe II. Parcelle} \\
\square = & 70{,}0455 \\
\hline
 & 83{,}5911 \\
-\triangle = & 6{,}3301 \\
\hline
 & 77{,}2610 \text{ Dritte Parcelle.}
\end{array}
$$

IV. Parcelle.

$$
\begin{array}{ll}
Q = 1871{,}79 & \text{l. } Q = 3{,}2722571 \\
 & \text{l. } 2 = 0{,}3010300 \\
\hline
 & \quad 3{,}5732871
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
A = 2{,}1868716 & \\
B = 1{,}3765770 & \\
\hline
 & 3{,}5634486 \\
\hline
 & 0{,}0098385 \\
\hline
\tfrac{1}{2}) & 0{,}0049192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
A = 2{,}1868716 \\
\quad 0{,}0049192 \\
\hline
\quad 2{,}1917908 = \text{l. } 155{,}52 \\
\qquad\qquad -\ 140{,}85 \\
\qquad\qquad\quad 14{,}67 \text{ Theilpunkt in AD} \\
\qquad\qquad -\ 11{,}11 \\
\qquad\qquad\quad 3{,}56 \text{ Abschnitt}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
C = 2{,}1917416 \\
\quad 0{,}0049192 \\
\hline
\quad 2{,}1966608 = \text{l. } 157{,}275 \\
\qquad\qquad -\ 144{,}\ 98 \\
\qquad\qquad\quad 12{,}295 \text{ Theilpunkt in BC} \\
\qquad\qquad -\quad 9{,}335 \\
\qquad\qquad\quad 2{,}\ 96 \text{ Abschnitt}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
B = 1{,}3765770 \\
\quad 0{,}0049192 \\
\hline
\quad 1{,}3814962 = \text{l. } 24{,}07 \text{ Perp.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
D = 0{,}0000000 - 1 \\
\quad 0{,}0049192 \\
\hline
\quad 0{,}0049192 - 1 = \text{l. } 0{,}10 \text{ negative Abscisse,}
\end{array}
$$

weil D hier negativ ist.

Abstand der Perp. = 2,925

Verification.

Voriger $\triangle =$ 6,3301

$\square =$ 69,7466

$+ \triangle =$ 1,1810

77,2577 Vierte Parcelle.

V. Parcelle.

Q = 1949,06 l. Q = 3,2898252
l. 2 = 0,3010300
A = 2,1958997 3,5908552
B = 1,3838692
3,5797689
0,0110863
½) 0,0055431

A = 2,1958997
0,0055431
2,2014428 = l. 159,015
— 140, 85
18,165 Theilpunkt in AD
— 14, 67
3,495 Abschnitt

C = 2,1990280
0,0055431
2,2045711 = l. 160,165
— 144, 98
15,185 Theilpunkt in BC
— 12,295
2, 89 Abschnitt

B = 1,3838692
0,0055431
1,3894123 = l. 24,515 Perp.

D = 0,8633229 — 1
0,0055431
0,8688660 — 1 = l. 0,74 negative Abscisse

Abstand der Perp. = 2,855

Verification.

$$
\begin{array}{rrl}
\square = & 69{,}3550 & \\
-\triangle = & 1{,}1810 & \text{siehe vorige Parcelle} \\
\hline
 & 68{,}1740 & \\
+\triangle = & 9{,}0705 & \\
\hline
 & 77{,}2445 & \text{Fünfte Parcelle.}
\end{array}
$$

VI. Parcelle.

21, 60	Theilpunkt in AD
3,435	Abschnitt
18,015	Theilpunkt in BC
2, 83	Abschnitt
24, 95	Perpendickel
1, 38	negative Abscisse
2,795	Abstand der Perpendickel
77,2723	Flächeninhalt.

VII. Parcelle.

24,975	Theilpunkt in AD
3,375	Abschnitt
20, 78	Theilpunkt in BC
2,765	Abschnitt
25, 37	Perpendickel
2, 02	negative Abscisse
2,735	Abstand der Perpendickel
77,2208	Flächeninhalt.

VIII. Parcelle.

28,295 Theilpunkt in AD
3, 32 Abschnitt
23,495 Theilpunkt in BC
2,715 Abschnitt
25,785 Perpendickel
2,655 negative Abscisse
2,685 Abstand der Perpendickel
77,2813 Flächeninhalt.

IX. Parcelle.

31, 57 Theilpunkt in AD
3,275 Abschnitt
26, 16 Theilpunkt in BC
2,665 Abschnitt
26,195 Perpendickel
3, 30 negative Abscisse
2, 63 Abstand der Perpendickel
77,3459 Flächeninhalt.

X. Parcelle.

34,785 Theilpunkt in AD
3,215 Abschnitt
28, 77 Theilpunkt in BC
2, 61 Abschnitt
26,595 Perpendickel
3,935 negative Abscisse
2, 58 Abstand der Perpendickel
77,2030 Flächeninhalt.

XI. Parcelle.

37,955	Theilpunkt in AD
3, 17	Abschnitt
31,335	Theilpunkt in BC
2,565	Abschnitt
26,985	Perpendickel
4, 57	negative Abscisse
2,535	Abstand der Perpendickel
77,2478	Flächeninhalt.

XII. Parcelle.

41,085	Theilpunkt in AD
3, 13	Abschnitt
33,855	Theilpunkt in BC
2, 52	Abschnitt
27, 37	Perpendickel
5,205	negative Abscisse
2,495	Abstand der Perpendickel
77,3775	Flächeninhalt.

XIII. Parcelle.

44,165	Theilpunkt in AD
3, 08	Abschnitt
36,335	Theilpunkt in BC
2, 48	Abschnitt
27, 75	Perpendickel
5, 84	negative Abscisse
2,445	Abstand der Perpendickel
77,1838	Flächeninhalt.

XIV. Parcelle.

47,205	Theilpunkt in AD
3, 04	Abschnitt
38, 77	Theilpunkt in BC
2,435	Abschnitt
28,125	Perpendickel
6, 47	negative Abscisse
2, 41	Abstand der Perpendickel
77,2836	Flächeninhalt.

XV.

50,205	Theilpunkt in AD
3, —	Abschnitt
41,175	Theilpunkt in BC
2,405	Abschnitt
28, 49	Perpendickel
7,095	negative Abscisse
2,375	Abstand der Perpendickel
77,3142	Flächeninhalt.

XVI.

53,165	Theilpunkt in AD
2, 96	Abschnitt
43,535	Theilpunkt in BC
2, 36	Abschnitt
28,855	Perpendickel
7, 72	negative Abscisse
2,335	Abstand der Perpendickel
77,2723	Flächeninhalt.

XVII. Parcelle.

56,085	Theilpunkt in AD
2, 92	Abschnitt
45,865	Theilpunkt in BC
2, 33	Abschnitt
29,21	Perpendickel
8, 34	negative Abscisse
2, 30	Abstand der Perpendickel
77,2001	Flächeninhalt.

XVIII. Parcelle.

58,975	Theilpunkt in AD
2, 89	Abschnitt
48,165	Theilpunkt in BC
2, 30	Abschnitt
29, 56	Perpendickel
8, 96	negative Abscisse
2, 27	Abstand der Perpendickel
77,3270	Flächeninhalt.

XIX. Parcelle.

61,825	Theilpunkt in AD
2, 85	Abschnitt
50,425	Theilpunkt in BC
2, 26	Abschnitt
29, 91	Perpendickel
9, 57	negative Abscisse
2, 24	Abstand der Perpendickel
77,2969	Flächeninhalt.

XX. Parcelle.

$$\frac{29{,}91 + 30{,}25}{2} \times 2{,}205 \ldots = +\,66{,}3264$$

ab der vorgehende Triangel $= -\,143{,}1193$

$-\,76{,}7929$

$+ \triangle$ ABb 153,9725

77,1796

§. 46.

Anmerkungen.

1) Sollen die Parcellen §. 45. nach anderen Verhältnissen angelegt werden, so hat man sich bei den vorläufigen Seitenabschnitten nur hiernach zu richten.

2) Kommt es, wie etwa zum Behuf einer Verpachtung oder Versteigerung in Parcellen nicht sowohl auf die genaue, als symetrische Gleichheit der Stücken an, so beschränkt das ganze Verfahren sich auf die Berechnung der Flächenstückr in I. N. 2 und 3.

§. 47.

Sechzehntes Beispiel.

Vertheilung einer Gemeinwiese Fig. 36.

I.

Die beiden Abscissenlinien BK, KH, woran die Figur gebunden ist, sollen senkrecht von den Längenseiten der Parcellen geschnitten werden, mit Ausnahme

der zunächst an den beiden Enden AB, GH und an dem durchziehenden Wege liegenden Pareellen, welche stufenweise aus den schiefen Lagen in die die senkrechte übergehen sollen. Fig. 37. legt im vergrößerten Maasstabe den Abschnitt ABCDLA vor Augen, wonach

AL=30°,24 AB=16°— BC=23°,35 CD=15,66

und die Coordinaten Aa = 15°,8 Cc = 5°,22 Ll=12°

Ba = 2°,52 Bc = 22°,76

al = 30° cd = 15°,33

II.

Durch die Verlängerung der Ordinaten bis zum Einschnitt in die gegenüberliegenden Seiten wird die ganze Figur vorläufig in Paralleltrapezien zerlegt, welche nach Erforderniß der Pareellen eingetheilt werden.

Vermittelst der beiden ähnlichen Triangel LgA, und AfC', deren Seiten Lg, Af, parallel mit der Abscissenlinie BK gezogen sind, wird die Verlängerung CC' berechnet, die als Beispiel für die folgenden dienen mag.

Da Ag = Aa — Ll = 3,80 Lg = al = 30. —

Af = ac = Bc — Ba = 20,24, so ist

$$C'f = \frac{20,24 \times 3,80}{30} = 2,56$$

cC'=Aa—C'f=13,24 und CC'=Cc+cC'=18,46

III.

Indem es bei Wiesen nicht so genau, als beim Feldbau auf die Figur des Grundstücks ankommt, so ist

die Anzahl von 6 Parcellen hinlänglich, den Uebergang aus der Lage AB in die senkrechte CC′ zu vermitteln. Das Viereck ABCC′ mit der Grundlinie CC′ = 18,46 und den Coordinaten Bc=22,76 Cc=5,22 Af=20,24 C′f = 2,56; enthält 373″° 20″′ hiervon abgeschnitten das Paralleltrapez CC′NM = 83, 70

bleibt □ ABNM = 289,50 für die Flächensumme von 6 Parcellen, zu 48″° 25 gerechnet.

IV.

Die Parallele NM nach §. 1. zu bestimmen ist hier

$q = 83,70 \quad a = 18,46 \quad \frac{C'f}{Af} = \frac{2,56}{20,24} = 0,1265$

$\frac{Cc}{BC} = \frac{5,22}{22,76} = 0,2294$

$s = 0,1265 - 0,2294 = - 0,1029$

$NM = t = \sqrt{(a^2 - 2sq)} = 17,99$

$bc = mf = n = \frac{2q}{a+t} = \frac{167,40}{36,45} = 4,59$

V.

Um das Viereck ABNM in 6 Parcellen nach Erforderniß zu zerlegen, hat mnn nur die kürzere Seite AB in 6 gleiche Abschnitte zu theilen, und die entsprechenden Abschnitte der Seite BN nach §. 18. und 35. zu bestimmen.

Da $Lg : LA = Am : AM$

$30 : 30{,}24 = 15{,}65 : AM$,

und $Bc : BC = Bb : BN$

$22{,}76 : 23{,}35 = 18{,}17 : BN$

so ist $AM = 15{,}78$ und $BN = 18{,}64$

Setzt man nun von der Grundlinie NM ausgehend, den senkrechten Abstand des 1ten Perpendickels in AM $= \frac{Am}{6} = 2{,}6 = p$; des 2ten $= \frac{2\,Am}{6} = 2p = 5{,}2$

des 3ten . . . . $= 3p = 7{,}8$

des 4ten . . . . $= 4p = 10{,}4$

des 5ten . . . . $= 5p = 13$ —

Bezeichnet man die Perpendickel der entsprechenden Theilpunkte in BN durch y, y', y'', y''', y'''' und setzt man

$a = NM = 17{,}99$,

$\frac{Mm}{Am} = \frac{C'f}{Af} = 0{,}1265 = {}^1/n$

$\frac{Nb}{Bb} = \frac{Cc}{Bc} = 0{,}2294 = {}^1/m$, folglich

$s = {}^1/n - {}^1/m = -\ 0{,}1029$ (Siehe IV.) so ergibt sich

$$y = \frac{2q - ap}{a + ps} = \frac{96{,}50 - 46{,}774}{17{,}99 - 0{,}2675} = 2{,}805$$

$$y' = \frac{4q - 2ap}{a + 2ps} = \frac{193 - 93{,}548}{17{,}99 - 0{,}5350} = 5{,}70$$

$$y'' = \frac{6q - 3ap}{a + 3ps} = \frac{289{,}5 - 140{,}322}{17{,}99 - 0{,}8026} = 8{,}67$$

$$y''' = \frac{8q - 4ap}{a + 4ps} = \frac{386 - 187{,}096}{17{,}99 - 1{,}07} = 11{,}755$$

$$y'''' = \frac{10q - 5ap}{a + 5ps} = \frac{482,5 - 233,87}{17,99 - 1,3377} = 14,93$$

und die entsprechenden Abschnitte der Seiten sind von B gegen C gerechnet, 3,32. 3,26. 3,16. 3,05. 2,97. 2,88. von A gegen M 2,68. 2,62. 2,62. 2,62. 2,62. 2,62.

VI.

Da CC′NM = 83,70 = 48,25 + 35,45, so erhält man die 7te Parcelle NMPQ durch Abzug des Paralleltrapez CC′PQ = 35,45 = q, wozu a und s aus IV genommen den Werth der Parallele PQ = $\sqrt{(a^2 - 2qs)}$ = 18,26 geben, wonach der Abstand derselben von der Grundlinie, oder CC′ $= \frac{2q}{a + t} = 1,93$

VII.

Die 8te Parcelle besteht aus den Trapezien

CC′PQ = 35,45

CC′RS = 12,80 = q, welches von CL′LG = 102,60

48,25

abgeschnitten wird, und wofür in Anwendung der Formel 1. §. 4.

a = CC′ = 18,46 d = LL′ = 18,38 (II.)

b = cl = 5,57, woraus

$$RS = t = \sqrt{(a^2 - 2q\frac{a - d}{b})} = \sqrt{340,4039} = 18,45$$

und $\frac{2q}{a + t} = 0,69$ der Abstand der Parallele RS von CC′

VIII.

Auf diese Art werden alle folgenden Parcellen an-einandergereiht, bis dahin, wo sie aus der senkrechten wieder in die schiefe Lage EK übergehen sollen.

§. 48.

Siebenzehntes Beispiel.

Das Vieleck Fig. 9. in gleiche Theile zu theilen und die Theillinie LA′ B′C′P parallel mit den Seiten IH, HG, GF, FE durchzuführen; gegeben

IH = a = 13,4 HG = a′ = 13,82 GF = a″ = 9,43
FE = a‴ = 24,5

Kl = 13,6 Jl = 3,2 Am = 13,8 Hm = 3,34
An = 13,4 Hn = 3,56 Bo = 13 — Go = 2,5
Bp = 13,2 Gp = 2,8 Cq = 10,72 Fq = 9,32
Cr = 7,88 Fr = 11,4 Dt = 10,2 Et = 3,12

Flächeninh. = 591″°,6560, dessen Hälfte Q = 295,8280

Berechnung nach §. 10 und 12.

1) $-s = \frac{32}{136} + \frac{324}{1380} = -0,47747015$ $l.s. = 0,6789462-1$

$-s' = \frac{356}{1340} + \frac{25}{130} = -0,45797933$ $l.s' = 0,6608459-1$

$+s'' = \frac{932}{1072} - \frac{28}{132} = +0,65728177$ $l.s'' = 0,8177512-1$

$-s''' = \frac{1140}{788} + \frac{312}{1020} = -1,7525829$ $l.s''' = 0,2436783$

2) $l.\beta = l.\frac{13,4}{13,8} = 0,9872257 - 1$ (§. 9.)

$l.\gamma. = l.\frac{13,4 \times 13,2}{13,8 \times 13,-} = l.\beta + l.\frac{132}{30} = 0,9938562 - 1$

$l.\delta = l.\beta + l.\gamma + l.\frac{788}{1072} = 0,8601876 - 1$

$l.a'\beta = 1,1277337 = l.\ 13,419415$

$+ l.a''\gamma = 0,9683679 = l.\ 9,297536$

$+ l.a'''\delta = 1,2493537 = l.\ 17,756349$

$a = 13,400000$

$53,873300 = A.$

3) $l.\ s'\ \beta^2$ gibt $- 0,43181461$

$l.\ s''\ \gamma^2$ gibt $+ 0,63894514$

$+ 0,20713053$

$l.\ s'''\ \delta^2$ gibt $- 0,92056300$

$- 0,71343247$

$s = - 0,47747015$

$- 1,19090262 = S$

4) $l.\ 2\ Q = 2,7720693$ (2 §. 12.)

$+ l.\ S = 0,0758764$

$2,8479457$

$\tfrac{1}{2})\ 1,4239728 = \tfrac{1}{2}\ l.\ 2\ SQ$

$- l.A = 1,7313712 = + 10$ pro rad. tab.

$l.\text{Sin}.C = 9,6926016 = l.\ \sin.\ 29^\circ.\ 31'.\ 10''$

$\tfrac{1}{2}\ l.\ 2\ SQ = 1,4239728$

$- l.\text{tang}.C = 9,7529859 - 10$ pro rad. tab.

$1,6709869 = l.\ \sqrt{(A^2 - 2\ SQ)}$

$= l.\ 46,879932$

$$A = 53,873300$$
$$-\sqrt{(A^2 - 2SQ)} = 46,879932$$
$$6,993368$$

l. 6,993368 = 0,8446864
— l. S. = 0,0758764
l. n. = 0,7688100 = l. 5,87 Höhe von P′A
l. βn = 0,7560357 = l. 5,70 Höhe von A′B′
l. γn = 0,7626662 = l. 5,79 Höhe von B′C′
l. δn = 0,6289976 = l. 4,255 Höhe von C′P.

§. 49.

Die Verification der vorgehenden Theilung erfordert die Berechnung der Vierecke IPA′H, A′B′GH, B′C′FG, C′PEF, aus deren Summe die Fläche Q besteht.

Für diese Berechnung hat man

$$PA' = a - ns = 13,40 - 2,80 = 10,60$$
$$\square\, IPA'H = n\left(a - \frac{ns}{2}\right) = 5,87 \times 12,- = 70,44$$

$$A'B' = a' - \beta ns' = 13,82 - 2,61 = 11,21$$
$$\square\, A'B'GH = \beta n\left(a' - \frac{\beta ns'}{2}\right) = 5,70 \times 12,52 = 71,36$$

$$B'C' = a'' + \gamma ns'' = 9,43 + 3,80 = 13,23$$
$$\square\, B'C'FG = \gamma n\left(a'' + \frac{\gamma ns''}{2}\right) = 5,79 \times 11,33 = 65,60$$

$$C'P = a''' - \delta ns''' = 24,50 - 746 = 17,04$$
$$\square\, C'PEF = \delta n\left(a''' - \frac{\delta ns'''}{2}\right) = 4,255 \times 20,77 = 88,38$$
$$Q = 295,78$$

§. 50.

Achtzehntes Beispiel.

Die Länderei DCEF Fig. 18. der Hofraithe I. trennt die Hofraithe II. von ihrer Länderei ABCD.

Die Eigenthümer kommen überein, die Grenze CD in die Richtung der geraden Linie GH zu verlegen, wodurch der erstere das Stück ICEG von $200^{\prime\prime\circ}$ gegen ein gleiches des besseren Bodens AHID abgeben, und der zweite sich in die unmittelbare Verbindung mit dem seinigen setzen will.

Aufnahme.

$AD = 34^\circ,9$ $DF = 30^\circ$ $B\mathfrak{B} = 13^\circ,5$ $A\mathfrak{B} = 1,5$

$C\mathfrak{C} = 15^\circ,6$ $D\mathfrak{C} = 2^\circ,6$ $E\mathfrak{E} = 17^\circ$ $F\mathfrak{E} = 3,4$

$\square\, ABCD = 513^{\prime\prime\circ},64$ $\square\, CEFD = 440^{\prime\prime\circ},38$

$\square\, IGFD = 440,38 - 200 = 240,38$

Berechnung nach §. 19.

$a = 34,9$ $\mathfrak{a} = 30,-$ $A = a + \mathfrak{a} = 64,9$

$q = 200$ $\mathfrak{q} = 240,38$ $Q = q + \mathfrak{q} = 440,38$

$m = \frac{B\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} = 9$ $n = \frac{C\mathfrak{C}}{D\mathfrak{C}} = 6$ $r = \frac{E\mathfrak{E}}{F\mathfrak{E}} = 5$

$m + r = 14$ $mr = 45$

$s = {}^1/n - {}^1/m = {}^1/18$

$\mathfrak{s} = {}^1/n + {}^1/r = {}^{11}/30$

$\mathfrak{a}s = 1,6666$ $a\mathfrak{s} = 12,7966$

$a\mathfrak{s} - \mathfrak{a}s = 11,13$ $q\mathfrak{s} = 73,3333$ $\mathfrak{q}s = 13,3544$

$a\mathfrak{a} = 1047,-$

$\mathfrak{q}s - q\mathfrak{s} - a\mathfrak{a} = -1106,9789$

$$\text{Amr}\,(a\text{ſ} - \mathfrak{a}s) = 2920,5 \times 11,13 = 32505,1650$$

$$+\ 2\text{mrs}\,\text{ſ}\,Q = \frac{90 \times 11 \times 440,38}{18 \times 30} = \underline{\quad 807,3633}$$

$$33312,5283$$

$$-\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}\,(m + r) = 1047 \times 14 \;.\;. - \underline{14658, -}$$

$$F = +\ \underline{\underline{18654,5283}}$$

$$\text{Amr}\,(\mathfrak{q}s - q\text{ſ} - \mathfrak{a}\mathfrak{a}) = 2920,5 \times -1106,9789$$

$$= -\ 3232931,8774$$

$$(m + r)\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) = 14 \times 14389,262$$

$$= 201449,6680$$

$$-\ mr\,Q\,(\mathfrak{a}s - a\text{ſ})$$

$$= -19817,1 \times -1,13 = \underline{220564,3230} + 422013,9910$$

$$f = -\ \underline{\underline{2810917,8864}}$$

$$-\ 2\,\text{Amr}\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) = -\ 84047679,342$$

$$+\ 2\,a\mathfrak{a}\,mrQ = 41497007,4$$

$$+4\,q\mathfrak{q}\,(m + r) = \underline{2692256,0} + 44189263,400$$

$$Z = -\ \underline{\underline{39858415,942}}$$

$$\frac{-f}{F} = +\ 150,6829 \qquad \frac{f^2}{F^2} = +\ 22705,3363$$

$$\frac{Z}{F} = -\ 2136,6617$$

$$+\ 20568,6746$$

$$\frac{-f}{F} = +\ 150,6829$$

$$-\sqrt{20568,6746} = -\ \underline{143,4178}$$

$$p = 7,2651 = \text{Ji}$$

$$Dc = {}^1/n\ p = \frac{7,2561}{6} = 1,21$$

$$Hh = \frac{2q - ap}{a + sp} = \frac{146,4515}{35,3036} = 4,15$$

$$Ah = {}^1/m\ Hh = \frac{4,15}{9} = 0,46$$

$$Gg = \frac{2q - ap}{a - sp} = \frac{262,81}{27,3362} = 9,615$$

$$Fg = {}^1/r\ Gg = \frac{9,615}{5} = 1,92$$

$$AH = \sqrt{(4,15^{\prime\prime} + 0,46^{\prime\prime})} = 4,175$$
$$FG = \sqrt{(9,615^{\prime\prime} + 1,92^{\prime\prime})} = 9,805$$
$$ID = \sqrt{(7,265^{\prime\prime} + 1,21^{\prime\prime})} = 7,365$$

Verification.

$\square$ AHID = 200,0315
$\square$ DIGF = 240,4085

§. 51.

Neunzehntes Beispiel.

Das Feld ABEF Fig. 38. besteht aus 4 Schlüsselstücken.
I = 100°° II = 80°° III = 50°° IV = 70°°
Diese sollen in Vierecke umgelegt und durch zwei gerade Linien CD, HG, Fig. 39. von einander geschieden werden. Gegeben

AF = 52°,20 Bb = 6° Ab = 0,18 Ee = 5°,5 Fe = 0,22

Berechnung.

1) Nach §. 25. wird ABEF vermittelst der senkrechten CD vorerst in die beiden folgende Vierecke eingetheilt:

1) $FECD = II + III = 130^{\square 0}$
2) $ABCD = I + IV = 170^{\square 0}$

wofür $CD = 5{,}72$ $AD = 28{,}92$ $DF = 23{,}28$

2) Nach 2 §. 22. wird nun die Linie GH bestimmt, welche von dem 1ten das □ $DIGF = 80^{\square 0} = \mathfrak{q}$
von dem 2ten das □ $AHID = 100^{\square 0} = q$
abschneidet, und man setzt zu dem Ende
$a = 28{,}92$ $\mathfrak{a} = 23{,}28$ $A = 52{,}20$ $Q = 180$

$$m = \frac{Bb}{Ab} = \frac{6}{0{,}18} = 33$$

$$r = \frac{Ee}{Fe} = \frac{5{,}5}{0{,}22} = 25$$

wonach

$$\begin{array}{rcr}
A\,(am - \mathfrak{a}r) & = & 19437{,}1920 \\
2\,Q & = & 360{,}\ — \\
 & & \overline{19797{,}1920} \\
+\ a\mathfrak{a}\,(r - m) & = & -\ \ 5386{,}0608 \\
F & = & +\ \overline{\underline{14411{,}1312}} \\
A\,(r\mathfrak{q} - mq - a\mathfrak{a}mr) & = & -\ 29061698{,}5440 \\
-\,(r - m)\,(a\mathfrak{q} + \mathfrak{a}q) & = & +\ 37132{,}8 \\
-\ Q\,(\mathfrak{a}r - am) & = & +\ \underline{67024{,}8} \\
 & & +\ \ 104157{,}6000 \\
f & = & -\ \overline{\underline{28957540{,}9440}}
\end{array}$$

Staatl. Bibliothek Passau

$$2aamrQ = +199957507{,}2$$
$$-4qq(r-m) = +\quad 256000{,}-$$
$$+200213507{,}2$$
$$-Amr(aq+aq) = -399781008{,}-$$
$$Z = -199567500{,}8$$

$$-\frac{f}{F} = +2009{,}3871 \qquad \frac{f^2}{F^2} = 4037636{,}5176$$

$$\frac{F}{Z} = -13848{,}1496$$
$$4023788{,}3680$$

$$-\frac{f}{F} = +2009{,}3871$$

$$-\sqrt{4023788{,}3680} = -2005{,}9382$$

$p = 3{,}4489$ oder $ID = 3{,}45$

$$Hh = \frac{2q - ap}{a + p/m} = \frac{200 - 99{,}774}{28{,}92 + 0{,}1045} = 3{,}455$$

$$Ah = {}^1/m\ Hh = \frac{3{,}455}{33} = 0{,}105$$

$$Gg = \frac{2q - ap}{a - p/r} = \frac{160 - 80{,}316}{23{,}28 - 0{,}138} = 3{,}445$$

$$Fg = \frac{3{,}445}{25} = 0{,}14$$

Verification.

□ AHID = 100,0274

□ DIGF = 80,0145

§. 52.

Verlangt die vorgehende Aufgabe nur die Verwandlung der Figuren in Vierecke, so beschränkt sie sich auf die folgende Fälle. Man theilt ABEF entweder

1) nach dem Vorbild Fig. 40. in die beiden Vierecke ACDF, BCDE, und diese hierauf in die Vierecke ACHI, IHDF und BCGK, GKED, oder

2) nach Fig. 41. vermittelst der senkrechten CD in die Vierecke ABCD, CDFE und diese in die Vierecke AIKD, BIKC und DHGF, CEGH, oder nach Anleitung der 42sten Figur, wenn J ein gemeinschaftlicher Theilpunkt seyn soll.

§. 53.

Zwanzigstes Beispiel.

Das Grundstück ABCDEF, Fig. 43., besteht aus 12 Parcellen, deren Scheidlinien durch keine Marksteine mehr bezeichnet, und weil es an Aufsicht und den gehörigen Flurbüchern hierzu fehlte, so bedeutend verrückt waren, daß eine neue Abtheilung verordnet werden mußte, wobei denn die Richtung des durchziehenden Feldwegs und die Lage der Parcellen, wegen Verschiedenheit des Bodens, so wenig wie möglich verändert werden sollte.

Zu diesem Ende wurde die Figur, vermittelst der Coordinaten Bb, Cc, Ee, Dd, und Ab, Ac, ce, Fe, dF bestimmt; die Fläche des Weges nach der Länge der Seiten AB, BC, und der angenommenen Breite bb′ vorläufig geschätzt, von dem Inhalt des Grundstücks abgezogen, und hiernach der Rest, den erkannten Ansprüchen gemäß, vertheilt.

Für die Summe der Parcellen I bis V, mit Berücksichtigung des Triangels A′Bb, wurde das Trapez b′BGg′ aufgestellt, dessen Grundlinie Bb′ = Bb — bh′ weil bb′ für die Breite des Wegs abgeht.

Vermittelst des Quotienten $\frac{Cc - Bb}{bc}$ (2 §. 4.) wurde die Parallele Gg′ berechnet, so wie auch Hh zur Fortsetzung des Wegs in der Entfernung bh, woraus sich denn BH, ferner CH = BC — BH und eine genauere Berechnung des Weges ergab. Da diese der ersten Schätzung sehr nahe kam, so bedurfte das Viereck A′BGg′ keiner Berichtigung, und wurde in die 5 ersten Parcellen eingetheilt, wobei Ji parallel Bb, und die übrigen Theillinien parallel Ag gezogen worden sind.

Um die VI Parcelle an die senkrechten Seiten Hh, Fh zu legen, hatte man $\frac{Fe}{Ee}$ §. 3.

Auf die Grundlinie lh′ = Hh — Hh′ — lh wurde das Trapez lh′mn als Summe der Parcellen VII und VIII errichtet.

Um das Viereck KEon für die Summe der Parcellen IX und X abzuschneiden, blieb nun
Kn = Kl — nl
Ep = he — nl
pn = Ee — lh, woraus sich die Fläche des Trapez Klpn ergab, und hiernach wurde die Höhe op des Ergänzungsdreiecks Eop bestimmt.

Um endlich die IX Parcelle einzurichten, hatte man

$Dd' = hd - nl$

$Dt = de$

$d'o = Dd - on - lh$

$Et = Dd - Ee$

und da hiermit die Fläche DE od bekannt war, so wurde das Ergänzungstrapez DQ qd' vermittelst des Quotienten $\frac{Dc}{Cc'} = \frac{dc}{Cc - Dd}$ §. 3. berechnet und dazu gefügt.

§. 54.

Aus dem Vorgehenden ergibt sich, daß es bei jeder Theilung hauptsächlich auf die Auswahl der schicklichsten Grundlinie ankommt. Aber diese liegt nicht immer in der Willkühr des Geometer, und kann alsdann nur durch Reductionen vermittelt werden, welche den Gegenstand des nächsten Abschnitts ausmachen. Ein vorläufiges Beispiel dieser Art enthält der folgende Paragraph.

§. 55.

Wenn ein Vieleck, Fig. 44., dessen Ecken B, C, D, E durch rechtwinklichte Coordinaten mit der Abscissenlinie AF verbunden sind, in mehrere Stücke getheilt, und jede Theillinie parallel mit einer Seite AH gezogen werden soll, so berechnet man vorläufig die zwischen den Ecken begriffene Paralleltrapezien ABB'H, BCC'B' u.s.w.

Zu diesem Ende bestimmt man erstens die senkrechten Entfernungen der Ecken von der Grundlinie AH,

die wir, der Ordnung nach, durch n, n′, n″ u. s. w. bezeichnen wollen.

Hieraus erhält man die Parallelen B′b′, C′c′, D′d′, E′e′ des Vierecks AFGH (§. 6.)

Man bestimmt nächst diesem die Verlängerungen b′B, c′C und die Abschnitte Dd′, Ee′, wonach

$BB' = Bb' + b'B'$

$CC' = Cc' + C'c'$

$DD' = D'd' - Dd'$

$EE' = E'e' - Ee'$

Es sey für diese Bestimmungen die Grundlinie AH = a, ferner HG = h, AF = f, der Winkel FAG = A und AHG = H.

1) Wegen Gleichheit der Winkel FAH, Bb′A, Cc′A, Dd′F, Ee′F ist

$\sin. A : \cos. A = Bb : bb' = Cc : cc' = Dd : dd' =$
$= Ee : ee'$, woraus

$bb' = \frac{Bb. \cos. A}{\sin. A} = Bb. \cot. A$

$cc' \ldots\ldots\ldots = Cc \cot. A$

$dd' \ldots\ldots\ldots = Dd \cot. A$

$ee' \ldots\ldots\ldots = Ee \cot. A$, wonach

$Ab' = Ab + bb' \qquad n = Ab' \sin. A$

$Ac' = Ac + cc' \qquad n' = Ac' \sin. A$

$Ad' = Ad + dd' \qquad n'' = Ad' \sin. A$

$Ae' = Ae + ee \qquad n''' = Ae' \sin. A$

$n'''' = Hg \sin. A$ Höhe der Parallele Gg

2) $\sin. A : 1 = Bb : Bb' = Cc : Cc' = Dd : Dd'$
$= Ee : Ee'$, woraus

$$Bb' = \frac{Bb}{\sin. A} = Bb \text{ cosec. } A$$

$$Cc' \ldots\ldots = Cc \text{ cosec. } A$$

$$Dd' \ldots\ldots = Dd \text{ cosec. } A$$

$$Ee' \ldots\ldots = Ee \text{ cosec. } A$$

Aus der Analogie $Fe' : Ee' = Fg : G'g$ findet man den Abschnitt $G'g = \frac{Ee' \times Fg}{Fe'} = \frac{Ee' \,(AF - Ag)}{AF - Ae}$

In diesem Ausdruck ist $AF = f$, Ee' und Ae' gegeben, aber Ag noch zu bestimmen, und
da $AF : Ag = AF \sin. A : h \sin. A$
oder $1 : Ag = \sin. A : n''''$,
so ist $Ag = \frac{n''''}{\sin. A} = n'''' \text{ cosec. } A$

3) Die Parallelen des $\square$ AHGF sind nach §. 6. und §. 2.

$$B'b' = a - ns = a - n\,(\cot. A + \cot. H.)$$

$$C'c' = a - n's$$

$$D'd' = a - n''s$$

$$E'e' = a - n'''s$$

$$Gg = a - n''''s$$ und hiernach

4) $BB' = B'b' + Bb'$

$$CC' = C'c' + Cc'$$

$$DD' = D'd' + Dd'$$

$$EE' = E'e' + Ee'$$

$$GG' = Gg - G'g$$

Ist z. B. $a = 31,5$ $f = 38,4$ $h = 28$, $A = 64° 16'$, wonach $\sin. A = 0,901$ $\cot. A = 0,482$ $\mathrm{cosec.} A = 1,11$ $H = 90°$ $\cot. H = 0$, ferner

$Ab = 5$, — $Ac = 11$, — $Ad = 23°$ — $Ae = 29$ —

$Bb = 2,5$ $Cc = 3,6$ $Dd = 4$ $Ee = 4,5$,

so folgt

1) $bb' = 1,205$ $cc' = 1,735$ $dd' = 1,928$ $ee' = 2,169$
$Ab' = 6,205$ $Ac' = 12,735$ $Ad' = 21,072$ $Ae' = 4,995$
$n = 5,59$ $n' = 11,474$ $n'' = 18,986$ $n''' = 24,175$
$n'''' = h = 28$.

2) $Bb' = 2,775$ $Cc' = 3,996$ $Dd' = 4,44$ $Ee' = 4,995$
$Ag = 31,08$ $G'g = \frac{4,995 \times 7,32}{11,569} = 3,16$

3) $B'b' = 28,806$ $C'c' = 25,97$ $D'd' = 22,349$
$E'e' = 19,848$ Gg $18,004$

4) $BB' = 31,581$
$CC' = 29,966$
$DD' = 17,909$
$EE' = 14,853$
$GG' = 14,844$.

Anmerkung.

Sind die Winkel nicht unmittelbar gegeben, so werden sie aus den Liniarbestimmungen berechnet, das heißt: aus den Coordinaten der Punkten G und F, oder aus dem Diagonalen AG oder HF.

Ein kürzeres Verfahren wird der folgende Abschnitt entwickeln. (Siehe §. 98.)

§. 56.

Wenn es sich ereignete, daß man eine berechnete Theillinie Bb, Fig. 45. wegen Localhindernissen nicht anlegen könnte, und die Theilung daher von dem Punkt C wollte ausgehen lassen, so müßte man den Punkt c auf der andern Seite entweder nach den Vorschriften §. 17. wieder ausmitteln, oder nach dem bekannten Verfahren bei der Verwandlung der Figuren, durch den Einschnitt der Linie Bc parallel Cb aufsuchen.

Wenn die Seiten AD, FE Fig. 46. parallel sind, oder wie in Fig. 47. unter gleichen Winkeln von Bb und Cc geschnitten werden, so wird alsdann bc = BC seyn.

Nimmt man aber in Fig. 45. bc′ = BC; so wird die Theillinie Cc′ desto fehlerhafter seyn, je weiter der Punkt C von B angenommen wird, und die Abweichung BC müßte sehr gering seyn, wenn man ohne Bedenken bc′ = BC annehmen dürfte.

Hiernach läßt sich die Einsicht derjenigen auch beurtheilen, welche ein Feld, Fig. 16., durch gleiche Abschnitte der Seiten AB, CD in gleiche Stücke zu theilen glauben.

§. 57.

Auf das angeführte Verfahren §. 56. gründet sich die Auflösung einer unterhaltenden Theilungsaufgabe, die vor einiger Zeit in einem öffentlichen Blatte zum Vorschein gekommen ist; sie fordert die Theilung eines Vierecks ABCD Fig. 48. aus den Mitten E, F zweier

gegenüber liegenden Seiten, ohne Vermessung irgend einer andern Linie dazu.

Man zieht von E nach dem Endpunkt D der Länge Seite AD die Linie ED, und schneidet diese durch BG parallel CD. Verbindet man nun die Durchschnittspunkte G mit F, so ist LGF die verlangte Theillinie.

Beweis.

Zieht man BD und BF so entsteht

$$\triangle EAD = \triangle EBD$$
$$BFD = BCF$$
$$GHD = BHF$$

folglich $EAD + BFD + GHD - BHF = EBD + BCF + BHF - GHD$

das ist $AEGFD = EBCFG$

und es finden zweierlei Auflösungen statt, da man eben so von F wie von E ausgehen kann.

§. 58.

So könnte man auch, um das Vieleck Fig. 49. zu halbiren, die Theillinie durch die Mitten der Seite AB, und der Diagonalen CD, EF, GH führen, wenn dies in der Ausübung nicht etwas beschwerlicher, als in der Zeichnung, und wenn es erlaubt wäre, eine Theillinie, so oft als es hierbei geschehen muß, ohne örtliche Veranlassung zu brechen.

§. 59.

Hat man ein länglichtes Vieleck, Fig. 50., in einem gegebenen Verhältniß der Länge nach zu theilen, so bestimmt man die Figur durch die Abscissenlinie AD mit den Coordinaten der Ecken B, C, E, F. Was nun an dem oberen Theil ABCDA fehlt, dies fügt man in dem △ AGD dazu, und wenn die Höhe Gg desselben berechnet ist, so nimmt man den Punkt G nach der Analogie Ff : Gg = AF : AG.

§. 60.

Soll die Theillinie Fig. 51. gebrochen und durch die Ecken A und D gezogen werden, so errichtet man an dem hierzu schicklichen Orte g den Perpendickel Gg.

§. 61.

Ein Dreieck ABC = Q, Fig. 52., in mehrere Stücke p, q, r, s zu theilen, und die Theillinien parallel mit einer Seite AB zu ziehen, nimmt man bekanntlich

$$CD = AC\sqrt{\frac{p}{Q}}\quad CF = AC\sqrt{\frac{p+q}{Q}}\quad CH = AC\sqrt{\frac{p+q+r}{Q}}$$

$$CE = BC\sqrt{\frac{p}{Q}}$$ u. s. w.

Ist zum Beispiel Q zu halbiren, Fig. 53.

AC = 13,74 BC = 13,30 AB = 19,09

Perp. CF = 9,57 AF = 9,86, so ist

$$\sqrt{\frac{p}{Q}} = \sqrt{1/2} = 0{,}707 \ldots = n$$

CD = 13,74	n = 9,715
CE = 13,30	n = 9,40
DE = 19,09	n = 13,495
CG = 9,57	n = 6,765
DG = 9,86	n = 6,97.

§. 62.

Gewöhnlicher ist die Theilung Fig. 54., wo die Theillinien aus der gegebenen Ecke C nach der Seite AB gezogen, und die Abschnitte AD, DE, EF, FB nach dem Verhältniß der Theilstücke p, q, r, s genommen werden.

§. 63.

Die Theilung der Figuren aus einem gegebenen Punkt D innerhalb derselben, Fig. 55. 56. hat keine Schwierigkeit. Man darf nur vorläufig aus dem Punkt D eine senkrechte Linie auf jede Seite der Figur zu ziehen. Ein Beispiel dafür enthält §. 33.

§. 64.

Um die Theillinie TS zu bestimmen, welche durch den gegebenen Punkt E gezogen, das gegebene Viereck ABST Fig. 57. in die gleichen Stücke ABST, TSCD theile, dient das folgende Verfahren:

1) Man berechnet oder konstruirt das Dreieck ABP, welches durch die Verlängerung der Seiten AD, BC

entsteht. Von der Fläche desselben subtrahirt man $\triangle ABG = \frac{1}{2} \square ABCD$, wonach $\triangle AGP$ zum Rest bleibt.

2) Durch E führt man HEM parallel BC, so daß die Fläche des Parallelograms MHPN der Fläche AGP gleich werde, und aus der quadratischen Differenz der Abschnitte EH, EM nimmt man die Quadratwurzel. Es sey denn die Linie $NS = \sqrt{(EM'' - EH'')}$.

3) Man nimmt nun $BS = BP - HM - NS$ und zieht die verlangte Theillinie durch S und E. Die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen nehme man $GF = BG$ und ziehe AF, so ist

$$\triangle AFG = \triangle ABG = \frac{1}{2} \square ABCD$$
$$\triangle FQC = \triangle AQD \text{ folglich}$$
$$\triangle PDC = \triangle PAF$$

und da die ähnlichen Triangel HEF, NKS, EMK sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten EH, NS, EM verhalten, und $EM'' = HE'' + NS''$ genommen wurde, so ist auch

$$\triangle EMK = \triangle HET + \triangle NKS \text{ folglich}$$
$$\triangle TSP = \square MHPN = \triangle AGP \text{ und}$$
$$\square AGCD = \triangle AGP - \triangle PCD$$
$$= \triangle AGP - \triangle PAF = \triangle AFG$$
$$= \frac{1}{2} \square ABCD.$$

§. 65.

Bei dem Vorhergehenden könnte die Frage entstehen, wie man zu verfahren habe, wenn der Thei-

lungspunkt ausserhalb des Theilfeldes angenommen würde. Obschon dieser Fall sich schwerlich in der Ausübung darbieten möchte, so wird die folgende Aufgabe denn doch eine Stelle hier verdienen. Mehreres darüber findet man in den Beiträgen zur praktischen Meßkunde von Schleicher. Es sey das Dreieck ABC, Fig. 57. in m Theile zu theilen, so daß die Theillinien in dem äusseren Punkt D zusammenlaufen.

$\sphericalangle BAC = A, \ \sphericalangle ABC = B, \ \sphericalangle ACB = C$

$AB = c, \ BC = a, \ AC = b$

$Dd = d$ senkrecht auf AB

$Ad = d'$

$Bd = a - d' = C'$

Auflösung.

Zieht man CF parallel AB durch D und Aa, Bb parallel Dd, so ist

$AE = Aa \text{ cosec. } FEC = d \text{ cosec. } A$

$aE = d \text{ cot. } A$

$DE = Ad + aE = d + d \text{ cot. } A$

$BF = d \text{ cosec. } B$

$bF = d \text{ cot. } B$

$DF = Bd = bF = c' + d \text{ cot. } B$

Setzt man nun $x = AT$, Entfernung der 1ten Theillinie Tt, so ist

$\triangle ATt : \triangle ETD = AT^2 : ET^2$

$\triangle ABC : \triangle ATt = m : 1$

$\triangle EDT : \triangle ABC = DE + ET : AB + AC$, wonach

$1 : 1 = m . DE \times AT^2 : ET \times AB \times AC$ und

$m. DE = AT'' = ET \times AB + AC$ oder

$m x^2 (d' + d \cot. A) = bc (x + d \text{ cosec. } A)$

Ist nun AI die Entfernung der nten Theillinie (im gegenwärtigen die 3te) so ist

$\triangle ABC : \triangle AJi = 1 : {}^n/_m = m : n$, und setzt man Ai wieder $= x$, so erhält man nach obigem

$m x^2 (d' + d \cot. A) = nbc (x + d \text{ cosec. } A)$

woraus

$$\frac{x^2 - nbcx}{m (d' + d \cot. A} = \frac{nbcd \text{ cosec. } A}{m (d' + d \cot. A)}$$

oder wenn man zur Abkürzung des Ausdrucks

$$q = \frac{bc}{m (d' + d \cot. A)}$$ setzt,

$x^2 - nqx = nqd \text{ cosec. } A$, woraus

$x = \frac{1}{2} nq \pm \sqrt{(nqd \text{ cosec. } A + \frac{1}{4} n^2 q^2)}$ und bringt man für n die Zahlen 1, 2, 3 ... in diesen Ausdruck, so ergibt sich

$AT = \frac{1}{2} q \pm \sqrt{(qd \text{ cosec. } A + \frac{1}{4} q^2)}$

$AH = q \pm \sqrt{(2 qd \text{ cosec. } A + q^2)}$

$AI = \frac{3}{2} q \pm \sqrt{(3 qd \text{ cosec. } A + \frac{9}{4} q^2)}$ u. s. w.

Finden keine Theilpunkte mehr statt auf der Seite AC, so nimmt man die übrigen auf BC, von B ausgehend, nach der ähnlichen Formel

$y = \frac{1}{2} n Q \pm \sqrt{(n Qd \text{ cosec.} B + \frac{1}{4} n^2 Q^2)}$

worin $Q = \frac{ab}{n (c' + d \cot, B)}$

Aus der Analogie ET : DE = AT : At, ergibt sich die Entfernung $At = \frac{AT \times DE}{ET}$; eben so findet man

$$Ah = \frac{HA \times DE}{HE}$$

$$Ai = \frac{IA \times DE}{IE}$$

$$Bl = \frac{BL \times DF}{LF}$$

$$Bk = \frac{BK \times DF}{KF}$$

Dritter Abschnitt.

Gleichungen für die Ordinaten zweier Abscissenlinien.

§. 66.

Die Neigung zweier, in A zusammentreffenden Abscissenlinien Fig. 1. Tab. V. ist durch das rechtwinklichte Dreieck AED oder AE′D′ gegeben.

b drückt die Grundlinie AE und AE′ aus,

p die Höhe DE und D′E′

h die Hypothenuse AD und AD′

Setzt man

AB = y senkrrcht auf MA

BC = y′ senkrecht auf NA

AC = x′

so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AD′E′, ADE ABC

AB : BC = AD : AE = AD′ : AE′

AB : AC = AD : DE = AD′ : D′E′, woraus

1) $y' = {}^{b}/_{h}\, y$, 2) $x' = {}^{p}/_{h}\, y$ und 3) $y = {}^{h}/_{b}\, y' = {}^{h}/_{p}\, x'$

§. 67.

Das rechtwinklichte Dreieck, welches die Neigung zweier Abscissenlinien bestimmt, heißt im Folgenden das Neigungsdreieck, dessen Grundlinie, Höhe und Hypothenuse beständig durch b, p, h bezeichnet werden.

§. 68.

Setzt man Fig. 2. AB = y senkrecht auf FM AF = x, BC = y′ senkrecht auf NF und FC = b, als Abscisse des Perpendickels BC und als Grundlinie des Neigungsdreiecks FGC, so ist

1) $y' = {}^{h}/_{b}\, y - p$ 2) $y' = \frac{b^2 - hx}{p}$

3) $y = \frac{b\,(y' + p)}{h}$ 4) $x = \frac{b^2 - py}{h}$

denn wegen der Aehnlichkeit der Triangel GCF, GAB, ADF, DCB ist

GC : FC : GF = p : b : h =

= AG : AB : BG = AG : y : BG =

= AD : AF : DF = AD : x : DF = CD : BC : BD

Aus b : h = y : BG = $^{h}/_{b}$ y folgt

$y' = BC = BG - GC = {}^{h}/_{b}\, y - p$ (N. 1.)

Aus $b : h = x : DF = {}^{h}/_{b}\, x$ folgt

$$CD = CF - DF = b - {}^{h}/_{b}\, x = \frac{b^2 - hx}{b} \text{ und da}$$

$$p : b = CD : BC = \frac{b^2 - hx}{b} : BC, \text{ so ist auch}$$

$$y' = BC = \frac{b^2 - hx}{p} \quad (N. 2.)$$

Nro. 3. ergibt sich aus Nro. 1. und Nro. 4. aus Nro. 2.

§. 69.

Setzt man Fig. 3. $BC = y'$ senkrecht auf NF $FC = x'$, $AB = y$ senkrecht auf MF und $AF = b$ als Abscisse des Perpendickels AB und als Grundlinie des Neigungsdreiecks DHF, so ist

$$1)\ y' = {}^{b}/_{h}(y - p) \qquad 2)\ x' = \frac{b^2 + py}{h}$$

$$3)\ y = {}^{h}/_{b}\, y' + p \qquad 4)\ y = \frac{hx' - b^2}{p}$$

denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke DBC und DFA ist

$$FD : FA : AD = BD : BC : CD$$

$$FD : FA = BD : BC = AB - AD : BC$$

oder $h : b \quad = \quad y - p : y' = {}^{b}/_{h}(y - p)$ (N. 1.)

ferner $FD : AD = BD : CD = AB - AD : CD$

$$= (AB - AD)\frac{AD}{FD}$$

und $FC = FD + CD = FD + (AB - AD)\,\dfrac{AD}{FD}$

$$= \frac{FD'' - AD'' + AD \times AB}{FD}$$

$$= \frac{AF'' + AD \times AB}{FD}$$

$$= \frac{b^2 + py}{h} \quad (N. 2.)$$

Aus Nro. 1. folgt Nro. 3., und aus 2 ergibt sich Nro. 4.

§. 70.

Ist FA′D′ oder FC′G Fig. 3. das Neigungsdreieck, AB = y, AF = x, BC = y′ FC = x′, so ist

1) $y' = {}^b/_h\, y - {}^p/_h\, x$ 2) $x' = {}^b/_h\, x + {}^p/_h\, y$

3) $y = {}^b/_h\, y' + {}^p/_h\, x$ 4) $x = {}^b/_h\, x' - {}^p/_h\, y'$

denn wegen Aehnlichkeit der Triangel

DAF, G′C′F, D′A′F ist

$$\frac{AD'}{D'T} = \frac{G'C'}{G'F} = \frac{AD}{DF} = {}^p/_h$$

$$\frac{A'F}{D'F} = \frac{FC'}{G'F} = \frac{AF}{DF} = {}^b/_h$$ und gemäß 1 §. 69.

$$y' = BC = \frac{AB \times FA}{FD} - \frac{AD \times FA}{FD}$$

$$= \frac{AB \times FC'}{G'F} - \frac{FA \times A'D'}{G'F}$$

$$= \frac{AB \times FA'}{D'F} - \frac{FA \times A'D'}{D'F} = {}^b/_h\, y - {}^p/_h\, x \text{ (N. 1)}$$

ferner

$$x' = FC = \frac{AF \times AF}{FD} + \frac{AD \times AB}{FD}$$

$$= \frac{AF \times FC'}{G'F} + \frac{AB \times G'C}{G'F}$$

$$= \frac{AF \times A'F}{D'F} + \frac{AB \times A'D'}{D'F} = {}^b/_h\, x + {}^p/_h\, y \text{ (N. 2.)}$$

und aus der Verbindung von Nro. 1. und 2 findet man Nro. 3 und 4.

§. 71.

Drückt man durch w den spitzen Winkel an der Grundlinie des Neigungsdreiecks aus, so ist

$^b/_h$ = cosin. w

$^p/_h$ = sin. w für den Halbmesser 1.

§. 72.

Setzt man allgemein

m = $^b/_h$ n = $^p/_h$ und y, x für die gegebenen, y', x' für die gesuchten Coordinaten, so ist

$y' = m y \mp n x \quad x' = mx \pm n y$

und das obere Zeichen findet statt, wenn die Abscissenlinie der gesuchten Coordinaten oberhalb liegt; das untere im entgegengesetzten Fall.

§. 73.

Ist p so unbedeutend, daß h von b nicht merklich verschieden ist, so wird m = 1 und

$y' = y \mp nx \qquad x' = x \pm ny$

§. 74.

Ist auch x ein Bruch von geringem Werthe, folglich nx noch geringer, so wird nach §. 73. y' = y und x' = x — ny kann eine negative Größe werden, in welchem Fall CF sich von dem Punkt F nach der entgegengesetzten Richtung AF erstreckt.

§. 75.

Setzt man Fig. 4., BC $= y'$ senkrecht auf MF, FC $= x'$, AB $= y$ senkrecht auf NF AF $= b$ als Abscisse des Perp. AB und als Grundlinie des Neigungsdreiecks AFG, so ist

1) $y' = {}^b/_h (AG - y) = {}^b/_h (p - y)$

2) $x' = {}^b/_h FA - {}^p/_h y = \frac{b^2 + py}{h}$

3) $y = {}^h/_b - y' - p$

4) $\frac{hx - b^2}{p}$

Aus den Analogien $FG : FA = BG : BC = AG - AB : BC$
$h : b \quad = p - y : y'$
findet man N. 1.

Aus $FG : AG = BG : GC = AG - AB : GC$
$h : p \quad = \quad p - y : GC = {}^p/_h (p - y)$

ergibt sich $x' = FC = FG - GC = h - {}^p/_h (p - y)$

$$= \frac{h^2 - p^2 + py}{h}$$

$$= \frac{b^2 + py}{h} \text{ (N. 2.)}$$

Und aus 1 und 2 folgt 3 und 4.

§. 76.

Nimmt man Fig. 4. BC $= y'$ FC $= x'$, AB $= y$ FA $= h$ als Abscisse des Perp. AB und als Hypothenuse des Neigungsdreiecks ADF, so ist

1) $y' = AD - {}^b/_h y = p - {}^b/_h y$

2) $x' = FD + {}^p/_h y = b + {}^p/_h y$

3) $y = {}^h/_b (p - y') = {}^h/_p (x' - b)$

denn da FA : AD : FD = FG : AG : FA
oder h : p : b = FG : AG : h, so ist

$$AG = \frac{ph}{b}$$

$$\frac{FA}{FG} = \frac{FD}{FA} = b/h$$

$$\frac{AG}{FG} = \frac{AD}{FA} = p/h$$

Setzt man diese Werthe in 1 §. 75. so folgt

$$y' = b/h\,(\frac{ph}{b} - y) = p - b/h\,y = AD - b/h\,y \text{ (N. 1.)}$$

und bringt man solche in 2 §. 75., so folgt

$$x' = b/h\,h + p/h\,y = b + p/h\,y = FD + p/h\,y \text{ (N. 2.)}$$

Und aus Nro. 1. und 2 folgt Nro. 3.

§. 77.

Ist A′D′F oder G′A″F das Neigungsdreieck Fig. 4.

$AB = y \quad AF = x \quad BC = y' \quad FC = x'$

$m = b/h \quad n = p/h$ so ist

1) $y' = nx - my$ 2) $x' = mx + ny$
3) $y = nx' - my'$ 4) $x = mx' + ny'$

denn wegen der Aehnlichkeit der Triangel

FAD, FA′D′, FG′A″ ist

$$\frac{FD}{x} = \frac{FD}{FA} = \frac{FD'}{FA'} = \frac{FA''}{FG'} = b/h = m \text{ und } FD = mx$$

$$\frac{AD}{x} = \frac{AD}{FA} = \frac{AD'}{FA'} = \frac{A''G'}{FG'} = p/h = n \text{ und } AD = nx$$

Bringt man diese Werthe in die Gleichungen 1, 2, §. 76., so ergibt sich hier Nro. 1 und 2, wovon Nro. 3 und 4 nicht verschieden seyn können, da die Beziehungen von y′, y und x′, x zu dem Neigungsdreieck einerlei sind.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der vorgehenden Gleichungen.

§. 78.

Die Linie AM, Fig. 1. Tab. V. bewegt sich um den Mittelpunkt A in die Lage AN, welche das Neigungsdreieck AED bestimmt, dessen

Grundlinie AE = b = 15

Höhe DE = p = 8

Hypothenuse AD = h = 17

Man verlangt die Coordinaten BC = y′, AC = x′ aus der gegebenen Höhe AB = y = 51.

Berechnung.

$y' = \frac{15}{17} \times 51 = 45$ N. 1. §. 66.

$x' = \frac{8}{17} \times 51 = 24$ N. 2. §. 66.

§. 79.

Zur Umkehrung des vorgehenden Beispiels falle AN zurück in die Lage AM. Es sey gegeben BC = y′ = 45 AC = x′ = 24, und gesucht AB = y.

Berechnung.

$y = \frac{17}{15} \times 45 = 51$ N. 3. §. 66.

oder $y = \frac{17}{8} \times 24 = 51$ " "

Diese Auflösung kann nur zur Verification der vorgehenden gebraucht werden, denn weiß man nicht zum voraus, daß BA in den Durchschnittspunkt A fällt, so müssen die Gleichungen §. 72. in Anwendung genommen werden.

§. 80.

FM Fig. 2. steigt in die Lage FN. Für das Neigungsdreieck FAD ist

$b = 12,\ p = 16,\ h = 20$

Setzt man hier $AB = y = 21$, so ist

$BC = y' = \frac{12}{20}(21 - 16) = \frac{3}{5} \times 5 = 3$ N. 1. §. 69.

$FC = x' = \frac{144 + 336}{20} = 24$ N. 2. §. 69.

§. 81.

FN Fig. 2. fällt zurück in die Lage FM §. 80. Gegeben $BC = 3$, $FC = 24$, gesucht

$AB = y = \frac{20 \times 3}{12} + 16 = 21$ N. 3. §. 69.

$= \frac{480 - 144}{16} = 21$ N. 4. §. 69.

Auch diese Auflösung gründet sich auf die Voraussetzung, daß BA auf DA falle.

§. 82.

Für das Neigungsdreieck GCF Fig. 5. sey
$h = 20$, $p = 16$, $b = FC = 12$.

Setzt man hier $BC = y' = 21$, so ergibt sich nach 3, 4 §. 68.

$$AB = y = {}^{b}/_{h}\,(y' + p) = \tfrac{12}{20} \times 37 = 22{,}2$$

$$AF = x = \frac{b^2 - py}{h} = \frac{144 - 336}{20} = -9{,}6$$

und das negative Zeichen gibt zu erkennen, daß FA in der entgegengesetzten Richtung von FM zu nehmen ist.

§. 83.

Nimmt man zur Verification des vorigen Beispiels $AB = 22{,}2$ $FA = -9{,}6$, so findet man wieder

$$BC = y' = {}^{h}/_{b}\,y - p = \frac{20 \times 22{,}2}{12} - 16 = 21 \text{ N. 1. §. 68.}$$

§. 84.

Setzt man Fig. 6. für das Neigungsdreieck FA′D′, $b = 12$, $p = 16$, $h = 20$, ferner $BC = y' = 10$, $FC = x' = 6$, so ergibt sich

$$AB = y = \frac{by' + px'}{h} = \frac{12 \times 10 + 16 \times 6}{20} = 10{,}8$$

N. 3. §. 70.

$$FA = x = \frac{bx' - py'}{h} = \frac{12 \times 6 - 16 \times 10}{20} = -4{,}4$$

N. 4. §. 70.

§. 85.

Die Coordinaten des Dreiecks AEB Fig. 7. von der Grundlinie AB auf die Seite AE zu übertragen, sey $AB = 14$ $AG = 4$ EG senkrecht hierauf $= 3$ und $AE = 5$

Berechnung.

Zieht man AD parallel EG, und ED parallel AG, so erhält man das Neigungsdreieck ADE,

dessen Grundlinie AD = EG = 3

Höhe ED = AG = 4

und setzt man AB=y, BC=y′, AC=x′, so ergibt sich

$y' = {}^{b}/_{h}\ y = \frac{3}{5} \times 14 = 8,40$ N. 1. §. 66.

$x' = {}^{p}/_{h}\ y = \frac{4}{5} \times 14 = 11,2$ N. 2. §. 66.

§. 86.

oder man nimmt

$BC = \frac{3 \times 14}{5} = 8,4$ als Quotient der Grundlinie in den doppelten Inhalt des Triangels AEB,

ferner $AC = \sqrt{(14^2 - 8,4^2)} = \sqrt{(196 - 70,56)} = 11,2$

§. 87.

Die Coordination des Vierecks ABKE, Fig. 8. von der Grundlinie AB auf die Seite AE zu übertragen, sey KB = EG = 3 senkrecht auf AB = y = 14

EK = 10 AG = 4 AE = 5

Berechnung.

$BC = \frac{3}{5}.\ 14 = 8,40$ (§. 66.)

$AC = \frac{4}{5}.\ 14 = 11,20$

$KL = \frac{3}{5}.\ 10 = 6$

$EL = \frac{4}{5}.\ 10 = 8$

$AL = 5 + 8 = 13$

Verification.

1) Aus den Coordinaten der Grundlinie AB

$\square$ BKEG = 30°°
$\triangle$ AGE = 6°
36°°,—

2) Aus den abgeleiteten Coordinaten der Grundlinie AE

$\triangle$ ABC = 47,04
$\square$ BCLK = 12,96
60,00
— $\triangle$ EKL = 24,—
36°°,—

§. 88.

Reduction der Coordinaten des Vierecks ABGD, Fig. 9. von der Grundlinie GD auf die Seite AD. Gesetzt GD=55,6 BH=20,4 GH=11,3 AE=19,8 DE=10,8 AD=22,55 AB=55,1 BG=23,3

Berechnung.

Hier ist für das Neigungsdreieck ADE

b = AE = 19,8
p = DE = 10,8
h = AD = 22,55 und 1tens y = AB = 55,1

$y' = BC = {}^{b}/_{h}\, y = \frac{19,80 \times 55,10}{22,55} = 48,38$ N. 1. §. 66.

$x' = AC = {}^{p}/_{h}\, y = \frac{10,80 \times 55,10}{22,55} = 26,39$ N. 2. §. 66.

2tens y = GE = GD + DE = 55,6 + 10,80 = 66,40

$y' = GF = {}^b/_h\,(y - p) = \frac{19,80 \times 55,60}{22,55} = 48,81$ N. 1. §. 69.

$x' = AF = \frac{b^2 + py}{h} = \frac{19,8 + 10,8 \times 66,40}{22,55} = 49,18$ N. 2. §. 69.

§. 89.

Reduction der Coordinaten Fig. 10. von der Grundlinie FG auf die Seite FD. Gesetzt

$FG = 80°$ $BE = 18,40$ $GE = 5,79$ $DI = 34$

$FI = 4,21$ $FD = 34,26.$

Berechnung.

Zieht man DH und AB parallel FG, und FH parallel DI, so geht das Neigungsdreieck FHD hervor, welches hier in Betrachtung kommt, dessen

Grundlinie $b = FH = DI = 34°$ —

Höhe $p = DH = IF = 4,21$

Hypothenuse $h = FD = 34,26$

und für $y = FG = 80°$, —

$m = {}^b/_h = 0,9924$

$n = {}^p/_h = 0,1229$ ist

1) $GK = y' = my = 79,39$ N. 1. §. 66.

$FK = x' = ny = 9,83$ N. 2. §. 66.

Für $y = AB = EI = 74,21$ $x = FA = BE = 18,40$ ist

2) $BC = y' = my - nx = 71,385$ N. 1. §. 72.

$FC = x' = mx + ny = 27,38$ N. 2. §. 72.

§. 90.

Reduction der Coordinaten Fig. 11. von der Grundlinie BG auf die gegenüberliegende Seite AD. Gesetzt BG = 24, AB = 15 senkrecht auf BG, und GD = 5.

Berechnung.

Zieht man AE und FD parallel BG, DE parallel AB, so erhält man für das Neigungsdreieck ADE

$b = AE = BG = 24$

$p = DE = AF = AB - BF = 10$

$h = AD = \sqrt{(24^2 + 10^2)} = 26$

und für $y = AB = 15$ ist

1) $BC = \frac{24}{26} \times 15 = 13{,}845$ (N. 1. §. 66.)

$AC = \frac{10}{26} \times 15 = 5{,}77$ N. 2. §. 66.

ferner für $y = GD = 5$ ist

2) $GH = \frac{24}{26} \times 5 = 4{,}615$ $DH = \frac{10}{26} \times 5 = 1{,}925$

Anders

Zieht man die Diagonale BD, so entsteht $\triangle BDG = 60^{\square}$ $\triangle ABD = 180^{\square}$, woraus $BC = \frac{2 \times 180}{26} = \frac{180}{13} = 13{,}845$

und aus der Diagonale AG ergibt sich $\triangle AGD = 60^{\square}$ wonach $GH = \frac{2 \times 60}{26} = \frac{60}{13} = 4{,}615$

$AC = \sqrt{(AB^2 - BC^2)}$

$DH = \sqrt{(DG^2 - GH^2)}$

§. 91.

Reduction der Coordinaten Fig. 12. von der Grundlinie AB auf die entgegengesetzte Seite DC. Gesetzt

$AB = 35{,}75 \quad DE = 15 \quad AE = 8 \quad CF = 5$

$BF = 3{,}75 \quad DC = 26.$

Berechnung.

Man zieht GC und HD parallel AB, BI und AH parallel DE, und erhält das Neigungsdreieck GCD, wofür

$$b = GC = EF = 24$$

$$p = DG = ED - CF = 10$$

$$h = DC = 26$$

$m = \frac{12}{13}$, $n = \frac{5}{13}$, und

1) für $y = AH = DE = 15.$

$x = DH = AE = 8$ ist

$y' = AK = m.\,15 + n.\,8 = 16{,}92$ §. 72.

$x' = DK = m.\,8 - n.\,15 = 1{,}615$

2) für $y = BI = CF = 5$

$x = CI = BF = 3{,}75$ ist

$y' = BL = m.\,5 - n.\,3{,}75 = 3{,}17$

$x' = CL = m.\,3{,}75 + n.\,5 = 5{,}385$

§. 92.

Die Coordinaten der Theillinie EF, Fig. 13. des Vierecks ABCD zu entwickeln. Gegeben AD, mit den senkrechten Seiten AB, DC und deren Theilen AE, DF. Man zieht EI parallel AD, und aus dem Neigungsdreieck EFI berechnet man BG, EG (§. 66.) vermittelst der Ordinate EB, und CH, EH (§. 69.) vermittelst der Ordinate CI.

§. 93.

Die Coordinaten der Theillinie ad des Vierecks ABCD Fig. 14. zu entwickeln; gesetzt

$AD = 27{,}19 \quad AF = 0{,}10 \quad BF = 5{,}75 \quad DG = 0{,}41$

$CG = 3{,}365$

$Af = 0{,}05 \quad af = 2{,}88 \quad Dg = 0{,}21 \quad dg = 1{,}70$ —

Auf die Parallele rs gründet sich das Neigungsdreieck ade, wofür

$b = de = AD + Af + Dg = 27{,}45$

$p = ae = af - dg = 1{,}18$

$h = ad = \sqrt{(b^2 + p^2)} = 27{,}47$

$m = 0{,}999 \quad n = 0{,}043$, und hiernach ist

1) für $y = Br = BF - dg = 4{,}05$

$x = dr = AD + Dg + AF = 27{,}50$

$y' = Bt = m.\,4{,}05 - n.\,27{,}50 = 2{,}865$ §. 72.

$x' = dt = m.\,27{,}50 + n.\,4{,}05 = 27{,}65$

$at = dt - ad = 27{,}65 - 27{,}47 = 0{,}18$

2) für $y = Cs = CG - dg = 1{,}665$

$x = ds = DG - Dg = 0{,}20$

$y' = Cq = m.\,1{,}665 + n.\,0{,}20 = 1{,}67$

$x' = dq = m.\,0{,}20 - n.\,1{,}665 = 0{,}13$

§. 94.

Die Coordinaten der Theillinie ad des Vierecks ABCD, Fig. 15. zu bestimmen; gesetzt

$AD = 40 \quad AF = 8 \quad BF = 15 \quad DG = 6 \quad CG = 8$

$Af = 3{,}41 \quad af = 6{,}395 \quad Dg = 3 \quad dg = 4$

Für das Neigungsdreieck ade ist hier

$b = de = 33,59$

$p = ae = 2,395$

$h = ad = \sqrt{(b^2 + p^2)} = 33,675$

$m = 0,9975 \quad n = 0,0711$ und für

1) $y = Cs = CG - dg = 4$

$x = ds = DG - Dg = 3$ ist

$y' = Cq = m.\ 4 - n.\ 3 = 3,775$

$x' = dq = m.\ 3 + n.\ 4 = 3,275$

2) für $y = Br = BF - dg = 11$

$x = dr = gF = AD - Dg - AF = 29$ ist

$y' = Bt = m.\ 11 - n.\ 29 = 8,91$

$x' = dt = m.\ 29 + n.\ 11 = 29,71$

und $at = ad - dt = 33,675 - 29,71 = 3,965.$

§. 95.

Die Coordinaten für die Theillinie EH, FG, Fig. 16. des Vierecks ABCD zu berechnen; gesetzt

$AD = 50°$ $AB = 25$ $Bb = 24$ $Ab = 7$ $CD = 37$

$Cc = 35$ $Dc = 12$ $AF = 12,5$ $Ff = 12$ $Af = 3,5$

$GD = 18,26$ $Gg = 17,28$ $Dg = 5,925$ $AE = 4,165$

$Ee = 4$ $Ae = 1,165$ $HD = 6,04$ $Hh = 5,715$

$Dh = 1,96$

I.

Für das Neigungsdreieck EHk ist

$b = Ek = oh = AD + Ae - Dh = 49,205$

$p = Hk = Hh - Ee = 1,715$

$h = EH = \sqrt{(b^2 + p^2)} = 49,235$

$m = 0,9994 \quad n = 0,0348$ und

1) für $y = Fl = Ff - Ee = 8$

$x = El = ef = AF - Ae = 2{,}335$ ist

$y' = Ff' = m.\ 8 + n.\ 2{,}335 = 8{,}075$

$x' = Ef' = m.\ 2{,}335 - n.\ 8 = 2{,}055$

2) für $y = Gr = Gg - Ee = 13{,}28$

$x = Er = eg = AD + Ae - Dg = 45{,}24$ ist

$y' = Gg' = m.\ 13{,}28 - n.\ 45{,}24 = 11{,}70$

$x' = Eg' = m.\ 45{,}24 + n.\ 13{,}28 = 45{,}675$

woraus $Hg' = Hh - Eg' = 3{,}56$

II.

Für das Neigungsdreieck FGo ist

$b = Fo = fg = AD + Af - Dg = 47{,}575$

$p = Go = Gg - Ff = 5{,}28$

$h = FG = \sqrt{(b^2 + p^2)} = 47{,}87$

$m = 0{,}9938 \quad n = 0{,}1103$ und

1) für $y = Bp = Bb - Ff = 12$

$x = Fp = bf = Ab - Af = 3{,}5$ ist

$y' = Bb' = m.\ 12 + n.\ 3{,}5 = 12{,}31$

$x' = Fb' = m.\ 3{,}5 - n.\ 12 = 2{,}155$

2) für $y = Cq = Cc - Ff = 23$

$x = Fq - fc = AD + Af - Dc = 41{,}5$ ist

$y' = Cc' = m.\ 23 - n.\ 41{,}5 = 18{,}28$

$x' = Fc' = m.\ 41{,}5 + n.\ 23 = 43{,}78$

wonach $Gc' = FG - Fc' = 4{,}09$

§. 96.

Die Punkte C, D des Sechsecks ABCDEF sind durch rechtwinklichte Coordinaten mit der Abscissenlinie

BE verbunden. Man verlangt die Coordinaten dieser Punkte für die Grundlinie AF; gesetzt

$AF = 24$, mit den senkrechten Seiten $AB = 20$ und $EF = 10$; ferner $BE = 26$ mit den Coordinaten $Ed = 8$ $Dd = 6$ $Ee = 16$ $Cc = 2$. —

Zieht man EG parallel AF, so erhält man für das Neigungsdreieck EGB,

$$b = EG = AF = 24$$
$$p = BG = AB - EF = 10$$
$$h = BE = 26$$
$$m = \tfrac{12}{13} \quad n = \tfrac{5}{13}$$ und nach §. 77.

$$Dd = n \times Ed - m \times Dd = \frac{5 \times 8 - 12 \times 6}{13} = -2\tfrac{6}{13}$$

$$Ed' = m \times Ed + m \times Dd = \frac{12 \times 8 + 5 \times 6}{13} = 9\tfrac{9}{13}$$

$$Cc' = n \times Ec - m \times Cc = \frac{5 \times 16 - 12 \times 2}{13} = 4\tfrac{4}{13}$$

$$Ec' = m \times Ec + n \times Cc = \frac{12 \times 16 + 5 \times 2}{13} = 15\tfrac{7}{13}$$

wonach $Fd'' = Ed' = 9\tfrac{9}{13}$

$$Dd'' = EF - 2\tfrac{6}{13} = 7\tfrac{7}{13}$$
$$Fc'' = Ec' = 15\tfrac{7}{13}$$
$$Cc'' = EF + 4\tfrac{4}{13} = 14\tfrac{4}{13}$$

Anmerkung.

Nach der Berechnung §. 6. erhält man, mit entgegengesetzten Zeichen

$$Dd' = \frac{12 \times 6 - 5 \times 8}{13} = 2\tfrac{6}{13}$$

$$Cc' = \frac{12 \times 2 - 5 \times 16}{13} = -4\tfrac{4}{13}$$

Rückt man aber EG in die parallele Lage AF, so drückt

$Dd'' = EF - Dd'$ und

$Cc'' = EF + Cc'$

die senkrechte Entfernung der Punkte D′, C von der Linie AF aus.

§. 97.

Die Enden A, B, C, D, E, F, eines Vielecks, Fig. 18. sind durch rechtwinklichte Coordinaten auf der Abscissenlinie Af bestimmt. Man verlangt die Reduction derselben auf die Diagonale AF, da es wegen örtlichen Hindernissen nicht möglich war, sie unmittelbar damit zu verbinden. Gegeben

$AB = 15{,}82$

Die Ordinate des Punktes $B = 0$

$Ac = 26{,}48$, $Cc = 3$

$Ad = 40{,}98$ $Dd = 7{,}83$

$Ae = 57{,}18$ $Ee = 4{,}80$

$Af = 65{,}80$ $Ff = 8{,}98$

Für das Neigungsdreieck AFf ist hier

$b = Af \quad p = Ff \quad h = AF = \sqrt{(b^2 + p^2)} = 66{,}41$

$\log. m. = \log. b - \log. h = 0{,}9959924 - 1$

$\log. n = \log. p - \log. h = 0{,}1310428 - 1$

folglich da hier $y = 0$ und $x = AB = 15{,}82$

1) $\begin{array}{rl} \text{l. AB} = & 1{,}1992065 \\ + \text{ l. n} = & 0{,}1310428 - 1 \\ \hline & 0{,}3302493 = \text{l. } 2{,}14 = Bb' \text{ (§. 72.)} \end{array}$

$\begin{array}{rl} \text{l. AB} = & 1{,}1992065 \\ + \text{ l. m} = & 0{,}9959924 - 1 \\ \hline & 1{,}1951989 = \text{l. } 15{,}675 = Ab' \end{array}$

2) l. Cc = 0,4771213
l. m = 0,9959924 — 1
0,4731137 = l. 2,97

l. Ac = 1,4229180
l. n = 0,1310428 — 1
0,5539608 = l. 3,58

Summe = 6,55 = Cc′

l. Ac = 1,4229180
l. m = 0,9959924 — 1
1,4189104 = l. 26,235

l. Cc = 0,4771213
l. n = 0,1310428 — 1
0,6081641 — 1 = l. 0,405

Rest 25,83 = Ac′

3) l. Dd = 0,8937618
l. m. = 0,9959924 — 1
0,8897542 = l. 7,76

l. AD = 1,6125720
l. n. = 0,1310428 — 1
1,7436148 = l. 5,54

Rest 2,22 = Dd′

l. Ad = 1,6125720
l. m = 0,9959924 — 1
1,6085644 = l. 40,60

l. Dd = 0,8937618
l. n = 0,1310428 — 1
0,0248046 = l. 1,06

Summe 41,66 = Ad′

4) nach §. 12.

l. Ae = 1,7572442
l. n = 0,1310428 — 1
0,8882870 = l. 7,73

l. Ee = 0,6812412
l. m = 0,9959924 — 1
0,6772336 = l. 4,755
Rest 2,975 = Ee′

l. Ae = 1,7572442
l. m = 0,9959924 — 1
1,7532366 = l. 56,65

l. Ee = 0,6812412
l. n = 0,1310428 — 1
0,8122840 — 1 = l. 0,65
Summe 57,30 = Ae′

§. 98.

Setzt man in Vergleichung des Verfahrens §. 55. zur Einrichtung der Parallelen BB′, CC′ u. s. w. Fig. 44. Tab. IV. hier

m = cos. A. = 0,4342
n = sin. A. = 0,9010, so folgt

1) nach §. 71.

m. 2,5 + n. 5 = 1,085 + 4,505 = 5,59 = HB′
m. 5 — n. 25 = 2,17 — 2,25 = — 0,08 = AH — HB,
oder BB′ = 31,50 + 0,08 = 31,58

2)

m. 3,6 + n. 11 = 11,674 = HC′

m. 11 — n. 3,6 = 1,53

daher CC′ = 31,50 — 1,53 = 29,97

3) nach §. 77.

n. 23 — m. 4 = 18,986 = HD′

m. 23 — n. 4. = 13,591

und DD′ = 31,50 — 13,591 = 17,909

4)

n. 29 — m. 4,5 = 24,175 = HE′

m. 29 + n. 4,5 = 16,647

und EE′ = 31,50 — 16,647 = 14,853

§. 99.

Aufgabe.

Das Grundstück ABCD, Fig. 19. Tab. VI. soll durch den Weg MNOP in die gleichen Theile AMPD, NBCO abgetheilt werden. MP parallel AD soll die Richtung des Weges seyn; β dessen Breite.

Q ist der Inhalt des Grundstücks,

a die Länge von AD,

s die Summe der Quotienten §. 1.

Man verlangt die Höhen und Längen des Weges.

Auflösung.

Setzt man Mm = n, so ist

Nn = n + β

MP = a — ns

$NO = a - (n + \beta)\, s$ (§. 1.)

$F = MNOP = (MP + NO)\, {}^1/_2\, \beta = \beta a - \beta n s - {}^1/_2\, \beta^2 s$

$AMPD = an - {}^1/_2\, sn^2 = \frac{ABCD - MNOP}{2} = \frac{Q - F}{2}$

$2an - sn^2 = Q - F$

$sn^2 - 2an = -Q + F = -Q + \beta a - \beta n s - {}^1/_2\, \beta^2 s$

$sn^2 + \beta n s - 2an = -Q + \beta a - {}^1/_2\, \beta^2 s$

$n^2 + n\,\frac{(\beta s - 2a)}{s} = \frac{-Q + \beta a - {}^1/_2\, \beta^2 s}{s}$, woraus

$$n = \frac{a - {}^1/_2\, \beta s - \sqrt{(a^2 - sQ - {}^1/_4\, \beta^2 s^2)}}{s} = Mm$$

$$t = MP = {}^1/_2\, \beta s + \sqrt{(a^2 - sQ - {}^1/_4\, \beta^2 s^2)}$$

Beispiel.

$Q = 612{,}18 \quad \beta = 1{,}50 \quad a = 82{,}07 \quad s = -0{,}3908$

gibt $a^2 = 6735{,}4849$

$-\begin{cases} sQ = 239{,}2400 \\ {}^1/_4\, \beta^2 s^2 = 0{,}0859 \end{cases}$

$= -\ 239{,}3259$

und $\sqrt{6496{,}1590} = 80{,}5988$

$+\ {}^1/_2\, \beta s = 0{,}2931$

$t = 80{,}8919 = MP$

$n = \frac{a - MP}{s} = \frac{1{,}1781}{0{,}3908} = 3{,}015 = Mm$

$NO = MP - \beta s = 80{,}89 - 0{,}585 = 80{,}305$

$Nn = n + \beta = 3{,}015 + 1{,}50 = 4{,}515$

Verification.

$\square\, MNOP = \frac{80{,}89 + 80{,}305}{2} \times 1{,}50 = 120^{\square\circ}{,}89 = F$

$\square\, BCON = \frac{Q - F}{2} = \frac{612{,}18 - 120{,}89}{2} = 245{,}64$

$\square\, AMPD = \frac{82{,}07 + 80{,}89}{2} \times 3{,}015 = 245{,}66$

Anmerkungen.

1) Wenn die Breite des Weges oder die Gleichheit der Theilstücke nicht so genau bedungen ist, so kann man das Grundstück, vermittelst der Parallele EF, Fig. * vorläufig abtheilen und hieran die Hälfte der Wegesbreite zu beiden Seiten legen, ohne jedoch die Berechnung hierdurch abzukürzen.

2) Wenn die Theilstücke in ein anderes Verhältniß gebracht werden sollen, wie z. B. ABMP : ONCD = b : c so nimmt man $ABMP = b \dfrac{Q-F}{b+c}$

3) Wenn AG, Fig. * als die gegebene Richtung des Weges, nicht parallel mit der Grundlinie ist, so kann man die Coordinaten der Punkte B, C vorläufig darauf reduziren, oder die Berechnungsformel aus den Gleichungen §. 7. ableiten.

4) Ist in dem Obigen die Größe s positiv, so wird

$$n = \frac{\tfrac{1}{2}\beta s - a + \sqrt{(a^2 + sQ + \tfrac{1}{4}\beta^2 s^2)}}{s}$$

$$t = \tfrac{1}{2}\beta s + \sqrt{(a^2 + sQ + \tfrac{1}{4}\beta^2 s^2)}$$

§. 100.

Die Länderei Fig. 20. T. VI., welche in mehrere Parcellen abgetheilt werden soll, ist nur von der Seite AL zugänglich. Wollte man die Parcellen von dieser Seite ausgehen lassen, so würden sie, wegen unverhältnißmäßiger Länge, und wegen den Ecken der Figur,

sehr unschicklich für die Benutzung ausfallen; man findet es zweckmäßiger, das Grundstück vorläufig, vermittelst eines mit AD parallel laufenden Weges, in zwei gleiche Theile durchzuschneiden, um diese alsdann in die erforderlichen Parcellen einzutheilen.

Zu der Bestimmung der Seiten MP und NO dieses Weges, und der hierauf zu beziehenden Coordinaten, als nöthige Vorbereitung zur ferneren Abtheilung, werden die Triangel AHD und AHL mit den hierauf bezogenen Coordinaten gegeben.

Die Seiten der Triangel sind

AH = 77,52 AD = 86,10 DH = 46,50 HL = 69,48
AL = 30,56

Die Coordinaten sind

Ab = 20,83	Bb = 3,34
Ac = 38,55	Cc = 2,02
De = 13,80	Ee = 0,88
Df = 26,04	Ff = 0,90
Dz = 28,28	
Dg = 31,12	Gg = — 1,14
Lk = 36,60	Kk = 3,—
Ly = 42,60	
Li = 48,40	Ji = — 2,90

Berechnung.

I.

In dem Anhang N. 1. findet man die Coordinaten

HH′ = 41,635 DH′ = 20,705
Ll = 30,395 Al = 3,175

ferner

$\triangle$ AHD = 1792,34$''^{\circ}$

$\triangle$ AHL = 1059,84 rechnet man hierzu

130,30 = ABCDA

17,48 = DEFzD

66,34 = $\triangle$ Lky

— 10,38 = $\triangle$ HIy

— 38,98 = $\triangle$ HGz

so ergibt sich T = 3016$''^{\circ}$, 94$''$' für den Inhalt der Figur.

II.

Die Reductionen der Coordinaten auf die Grundlinie AD in N. 2., und Lh' in N. 3. geben

EE' = 12,75	DE' = 5,36
FF' = 23,715	DF' = 10,79
GG' = 27,355	DG' = 14,91
Kk' = 8,95	Lk' = 35,39
Ji' = 4,965	Li' = 48,235

III.

Addirt man zu dem Trapez ADER = 1072,08 (N. 4.)

die Fläche ABCDA = 130,30

so findet man ABCDERA = 1202,38

Hierzu ist nun noch das Trapez

$$\text{EMPR} = \frac{\text{T} - \text{F} - 1202,38}{2}$$

zu berechnen, um die Hälfte des, nach Abzug des Weges, übrigen Feldes in das Seitenstück ABCDMPA zu bringen, und zu dem Ende in die Formel §. 34.

$\frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} T - 1202,38 = 306,09$, oder
$Q = 612,18$ zu substituiren.

Und da $\frac{Rl''}{Ll''} = \frac{Al}{Ll} = \cot. A = + 0,1044$

$\frac{EF''}{FF''} = \frac{DF - DE'}{FF' - EE'} = \frac{10,79 - 5,36}{23,715 - 12,75} = - 0,4952$

folglich $s = - 0,3908$

ferner $a = ER = 82,07$ (N. 4.) und die Breite des Weges $\beta = 1,50$ seyn soll, so findet man in dem Beispiele §. 34. $MP = 80,89$ $NO = 80,305$
$n = 3,015$ als den Abstand dieser Parallelen und hiernach

$Lp = n + EE' = 15,765$;	$Ap = Pp \cot. A = 1,65$
$Ll' = Ll - Pp - \beta = 13,13$	$Ol' = Ll' \cot. A = 1,37$
$Bb' = Pp + Bb = 19,105$	$Pp' = Ap + Ab = 22,48$
$Cc' = Pp + Cc = 17,785$	$Pc' = Ap + Ac = 40,20$
$Kk'' = Ll' + Kk' = 22,08$	$Ok'' = Lk' - Ol' = 34,02$
$Ji'' = Ll' + Ji' = 18,095$	$Oi'' = Li' - Ol' = 46,865$
$Hh = Ll' + Hh' = 24,37$	$Oh = Lh' - Ol' = 67,20$

Anhang N. 1.

Berechnung des △ ADH aus den Seiten

46,50	l. 105,06	= 2,0214374
77,52	„ 48,56	= 1,7676011
86,10	„ 27,54	= 1,4399639
210,12	„ 18,96	= 1,2778383
	210,12	6,5068407

davon ½ = 3,2534203 = l. 1792°°, 34°', = ADH

$$3{,}2534203$$
$$+\ \mathrm{l.}\ 2 = 0{,}3010300$$
$$3{,}5544503$$
$$-\ \mathrm{l.}\ AD = 1{,}9350032$$
$$1{,}6194471 = \mathrm{l.}\ 41{,}635 = HH'$$
$$-\ \mathrm{l.}\ DH = 1{,}6674530 + 10 \text{ pro rad. tab.}$$
$$9{,}9519941 = \mathrm{l.sin.}\ 63^{\circ}{,}33'{,}24 = D$$
$$\mathrm{l.\ cos.}\ D = 9{,}6486649 - 10$$
$$+\ \mathrm{l.}\ DH = 1{,}6674530$$
$$1{,}3161179 = \mathrm{l.}\ 20{,}705 = DH'$$

und um den Winkel DAH zu bestimmen

$$\mathrm{l.}\ HH' = 1{,}6194471 + 10 \text{ (aus dem Vorgehenden)}$$
$$-\ \mathrm{l.}\ AH = 1{,}8894138$$
$$9{,}7300333 = \mathrm{l.\ sin.}\ 32^{\circ}, 29' 6'' = DAH$$

Berechnung des △ AHL.

$$\mathrm{Log.}\ \triangle AHL = 3{,}0252415 = \mathrm{l.}\ 1059^{\square\circ}{,}84^{\square\prime}$$
$$+\ \mathrm{l.}\ 2 = 0{,}3010300$$
$$3{,}3262715$$

ab

$$\mathrm{l.}\ AH = 1{,}8894138$$
$$\mathrm{l.}\ AL = 1{,}4851533$$
$$3{,}3745671 + 10 \text{ pro rad. tab.}$$
$$9{,}9517044 = \mathrm{l.sin.}\ 63^{\circ}{,}28{,}37 =$$
$$+DAH = 32,\ 29,\ 6 \quad LAH$$
$$95^{\circ}{,}57'{,}43'' = LAD$$

und $LAl = 180 - 95{,}57{,}43 = 84^{\circ}{,}2{,}17 = A.$

$$\mathrm{l.\ sin.}\ A = 9{,}9976432 - 10 \text{ pro rad. tab.}$$
$$+\ \mathrm{l.}\ AL = 1{,}4851533$$
$$1{,}4827965 = \mathrm{l.}\ 30{,}395 = Ll$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{l. cos. } A = 9{,}0164813 - 10 \\
+ & \text{l. } AL = \underline{1{,}4851533} \\
 & 0{,}5016346 = \text{l. } 3{,}175 = Al
\end{array}
$$

Anhang N. 2.

Reduction der Coordinaten der Punkte E, F, G auf die Grundlinie AD, vermittelst des Neigungsdreiecks, DHH', wofür

l. m = l. cos. D = 0,6486649 — 1 (N. 1.)

l. n = l. sin. D = 0,9519941 — 1 und hiernach gemäß III. §. 7.

EE' = m. 0,88 + n. 13,8 = 0,39 + 12,36 = 12,75

DE' = m. 13,8 — n. 0,88 = 6,14 — 0,79 = 5,36

FF' = m. 0,90 + n. 26,04 = 0,40 + 23,315 = 23,715

DF' = m. 26,04 — n. 0,90 = 11,595 — 0,805 = 10,79

und gemäß III. §. 12.

GG' = n. 31,12 — m. 1,14 = 27,865 — 0,51 = 27,355

DG' = m. 31,12 + n. 1,14 = 13,89 + 1,02 = 14,91

Anhang N. 3.

Reduction der Coordinaten auf die Linie Lh parallel AD, vermittelst des Neigungsdreiecks LHh', wofür

b = Lh' = lH' = Al + AD — DH' = 68,57

p = Hh' = HH' — Ll = 11,24

h = LH = 69,48

l. m = 0,9942743 — 1

l. n = 0,2089065 — 1. Hiernach ist

Kk' = m. 3,115 + n. 36,37 = 3,07 + 5,88 = 8,95 (§72)

Lk' = m. 36,37 — n. 3,115 = 35,89 — 0,50 = 35,39

und nach §. 77.

$Ji' = n.\,48{,}40 - m.\,2{,}90 = 7{,}83 - 2{,}865 = 4{,}965$

$Li' = m.\,48{,}40 + n.\,2{,}90 = 47{,}765 + 0{,}47 = 48{,}235$

Anhang N. 4.

Berechnung des Trapez ADER.

Da $\frac{AL}{Ll} = \cot.\,A = \cot.\,84\,,2',\,17''$

$Rr = EE' = 12{,}75$

$l.\,\cot.\,A = 9{,}0188369 - 10$

$l.\,Rr = 1{,}1055102$

$0{,}1233471 = l.\,1{,}33 = Ar$, so ist die Parallele $ER = Ar + AD - DE' = 82{,}07$

und $\square\,ADER = \frac{82{,}07 + 86{,}10}{2} \times 12{,}75 = 1072{,}08$

§. 101.

Je größer die Anzahl der Parcellen, je geringer wird die Breite derselben, und man könnte bei der vorgehenden Abtheilung genöthigt werden, einen Theil derselben, wegen den Ecken bei F, G, E, nach dem Vorbild Fig. 21 oder 22. anzulegen.

Nach dem Ersteren hat man vorläufig den Weg längst den Seiten DE, EF, FG, GH einzurichten, um die aufstoßenden Parcellen zugänglich zu machen.

Nach Fig. 22. läßt man die gebrochenen Theillinien stufenweise in gerade Linien übergehen. Es sey z. B. von dem oberen Stück, Fig. 20. ein Abschnitt,

Fig. 22. NFGHIA = $482^{\square°}$, $73^{\square\prime}$ in 8 Parcellen zu $60^{\square°}$, $34^{\square\prime}$ einzutheilen, so bestimmt man

1) die Parallele AN, BF, CG mit den zugehörigen Coordinaten und der Seite IH (Siehe Anhang I.) man theilt

2) Die Linien IH, CG in 8 gleiche Theile, verbindet die Theilpunkte durch gerade Linien und berechnet die eingeschlossenen Flächenstücke 1—8, wie in dem Anhang II. Hierzu sucht man nun

3) die Verbindungspunkte in den Linien BF, AN um die Parcellen zu vollenden (Anhang III.)

I.

Bestimmung der Parallelen und Coordinaten.

Nach den Angaben §. 35. ist

Ji'' = 18,095 Ni'' = 33,44
Ai'' = 10,305
AN = 23,135

indem der Abschnitt NFGHJi = 575,9708,

nach Abzug

des $\triangle AJi'' = \frac{Ji'' \times Ai''}{2} = \frac{18,095 \times 10,305}{2} = 93,2344$ für

482,7364

den Abschnitt NFGHIA übrig ließ.

Ferner ist

Hm	= 6,275		
Hh	= 14,28	mh	= 8,005
Gg	= 3,64	Fg	= 4,12
Ff	= 6,45	Nf	= 3,19

Bb = Ff = 6,45 Ab = 3,675 wegen Aehnlichkeit der Triangel ABb und AJi''

Cc = Gg = 3,64   Bc = 2,07

Ji' = mh = 8,005   Ci' = 4,56

wonach denn

$$BF = AN + Ab - Nf = 23{,}62$$

$$CG = BF + Bc - Fg = 21{,}57$$

$$Im = CG + Ci' - Gh = 20{,}335$$

$$HI = \sqrt{(Hm^2 + Im^2)} = 21{,}28$$

II.

Berechnung der Flächenstücke zwischen den Abschnitten der Linien HI und GC. —

Es ist $\frac{HI}{8} = \frac{21{,}28}{8} = 2{,}66$

und da $\frac{GC}{8} = \frac{21{,}57}{8} = 2{,}69625$, so nimmt man die 7 ersten Abschnitte zu 2,70 und den 8ten zu 2,67

Errichtet man aus jedem Theilpunkt von HI einen Perpendickel auf GC, so wird auch i'h = Im in 8 gleiche Theile zu 2,542 getheilt, und es entstehen

1) Die Trapezien 1 — 8

2) Die Triangel ICi', KK'l u. s. w., worauf die Berechnung der gesuchten Flächen beruht

Für die Bestimmung der Perpendickel nach I. §. 6. hat man

$$a = Ji' = 8{,}005$$

$$s = \frac{Hm}{Im} = \frac{6{,}275}{20{,}335}$$

$\beta = 2{,}542$ $\beta s = 0{,}7844$ $\beta^2 s = 1{,}9939$, wonach

der 1te Perp. $= a + \beta s = 8{,}005 + 0{,}7844 = 8{,}79$

2te $= 8{,}79 + \beta s$ $= 9{,}57$

3te $= 9{,}57 + \beta s$ $= 10{,}36$

und so fort der 4te $= 11{,}14$

5te $= 11{,}93$

6te $= 12{,}71$

7te $= 13{,}495$

Das

1te Trapez $= a\beta + \frac{1}{2}\beta^2 s = 20{,}3487 + 0{,}9969 = 21{,}3456$

2te " $= 21{,}3456 + \beta^2 s = 21{,}3456 + 1{,}9939 = 23{,}3395$

3te " $= 23{,}3395 + \beta^2 s$ $= 25{,}3334$

eben so das 4te $= 27{,}3273$

5te $= 29{,}3212$

6te $= 31{,}3151$

7te $= 33{,}3090$

8te $= 35{,}3029$

Man hat $Ci' = 4{,}56$ für die Grundlinie des ersten Triangels lCi', ferner

$K'l = KC + Ci' - li' = 270 + 4{,}56 - 2{,}54 \ldots = 4{,}72$ für den 2ten Triangel, und so fort für die folgende 4,875, 5,035, 5,19, 5,35, 5,51, 5,665, 5,795 und hiermit

den 1ten Triangel $= \frac{8{,}005 \times 4{,}56}{2} = 18{,}2514$

2ten " $= \frac{8{,}79 \times 4{,}72}{2} = 20{,}7444$

3ten " $= \frac{9{,}57 \times 4{,}875}{2} = 23{,}3269$

4ten " $= \frac{10{,}36 \times 5{,}035}{2} = 26{,}0813$

5te " $= \frac{11,14 \times 5,19}{2} = 28,9083$

6te " $= \frac{11,93 \times 5,35}{2} = 31,9127$

7te " $= \frac{12,71 \times 5,51}{2} = 35,0160$

8te " $= \frac{13,495 \times 5,665}{2} = 38,2246$

9te " $= \frac{14,28 \times 5,795}{2} = 41,3763$

woraus die gesuchten Flächen sich wie im Folgenden ergeben, nämlich die

1te IKK'C = 23″°,8386 durch Addition des 2ten Triangels zu dem 1ten Trapez, und Subtraction des 1ten Triangels, die

2te = 25,9220 durch Addition des 3ten Triangels zu dem 2ten Trapez und Abzug des 2ten Triangels; eben so die

3te = 28,0878
4te = 30,1543
5te = 32,3256
6te = 34,4184
7te = 36,5176
8te = 38,4546

III.

Berechnung der Verbindungspunkten in den Linien BF, AN.

Setzt man die Länge der Abschnitte BK″, AK‴ = 1° — so folgt

$$\square BCK'K'' = \frac{CK' + BK''}{2} \times Cc = \frac{2{,}70 + 1}{2} \times 3{,}64$$

$= 6{,}7340$

$\square ABK''K'''$ $= 6{,}4500$

Fügt man hierzu das obere $\square JKK'C$ $= 23{,}8386$

so fehlt noch E $= 23{,}3174$

Um die 1te Parcelle $= 60{,}3400$

zu vollenden.

Vergrößert man die Abschnitte um 1°, so vergrößert sich

$\square ABK'K''$ um $\frac{1 \times 3{,}64}{2} = 1{,}82$

$\square ABK''K'''$ um $6{,}45$

und ihre Summe um $8{,}27 = S$

und da $\frac{E}{S} = \frac{23{,}3174}{8{,}27} = 2°{,}82$ sehr nahe,

so nimmt man die Abschnitte

$BK'' = AK''' = 1° + 2{,}82 = 3{,}83.$

Verfährt man auf dieselbe Art mit den 5 folgenden Parcellen, so ergibt sich

der 2te Abschnitt $= 3{,}57$
3te „ $= 3{,}305$
4te „ $= 3{,}055$
5te „ $= 2{,}795$
6te „ $= 2{,}54$

Setzt man hierzu den 7ten Abschnitt

in BF zu 2,30
in AN zu 2,27

so erhält man für die 7te Parcelle

36,5176 in der oberen Abtheilung
9,1000 in der mittleren
14,7332 in der unteren

zusammen 60,3508

Für den 8ten Abschnitt bleiben nur noch
2,235 in der Linie BF
1,78 in AN, und die 8te Parcelle besteht
aus 38,4546 der oberen Abtheilung
8,9271 der mittleren
12,9483 der unteren
60,3300

§. 102.

Die Theilungsmethode §. 14., wenn die Theillinien parallel mit einer Seite der Figur verlangt werden, ist in dem Beispiele §. 37. erläutert worden.

Zu einer Anwendung der Gleichungen §. 4. in demselben Fall, ist das folgende Beispiel geeignet.

In dem Abschnitt ABCGD eines Geländes, Fig. 23. sollen 5 Parcellen zu 160°° nach der Richtung AD angelegt werden.

Aus den gegebenen Größen
AB = 20,59 BC = 30,91 GF = 30,44 FE = 20,50
ED = 7,28 AD = 17,89 AE = 16,34 BF = 18,26
CG = 12,89 berechnet man

I.

die Seiten und Coordinaten der Trapezien ABID, BCHI nach den Analogien

1) AE : AD = BF : BI = CG : CH
16,34 : 17,89 = 18,26 : BI = 12,89 : CH

2) AE : ED = BF : FI = CG : GH
16,34 : 7,28 = 18,26 : FI = 12,89 : GH

woraus $ID = FD - FI = 19{,}645$

$HD = GD - GH = 52{,}48$

3) $AD : AE = ID : IO = HD : HN$

$17{,}89 : 16{,}34 = 19{,}645 : IO = 52{,}48 : HN$

4) $AD : ED = ID : DO = AD : DN$

$17{,}89 : 7{,}28 = 19{,}645 : DO = 52{,}48 : DN$

woraus

$BI = 19{,}992$ $CH = 14{,}112$ $ID = 19{,}645$

$FI = 8{,}135$ $GH = 5{,}742$ $HD = 52{,}48$

$IO = 17{,}943$ $HN = 47{,}933$

$DO = 7{,}994$ $DN = 21{,}356$ und

$BM = IO = 17{,}943$

$DM = BI + DO = 27{,}986$

$AM = DM - DA = 10{,}096$

$NM = DM - DN = 6{,}63$

$BL = CH - NM = 7{,}482$

$CL = HK = HN - IO = 29{,}99$

II.

Für die Entwickelung der Theillinien nimmt man nun die Differenz der Parallelen $BI - AD = 2{,}102$ die Höhe derselben $IO = 17{,}943$ und $s = \frac{2{,}102}{17{,}943} = 0{,}1171$ positiv

folglich für die erste Parcelle

$$ad = t = \sqrt{AD'' + 2sq} = \sqrt{320{,}0521 + 37{,}4720} = 18{,}91$$

$$n = \frac{2q}{AD + ad} = \frac{2 \times 160''^{\circ}}{17{,}89 + 18{,}91} = 8{,}695$$

Inhalt $= 159''^{\circ}{,}9880$

für die 2te Parcelle

$bc = t' = \sqrt{AD'' + 4sq} = \sqrt{320{,}0521 + 74{,}9420} = 19{,}875$

$n' = \frac{2q}{ad + bc} = 8{,}25$ Inhalt $= 159{,}9325$

wonach das übrige Trapez

$BbcI = \frac{BI + bc}{2} \times (IO - n - n') = \frac{(19{,}99 + 19{,}875)}{2} (17{,}945 - 16{,}945) = 19{,}9325$

und für die 3te Parcelle

$q = 160''° - 19{,}9325 = 140{,}07$ zu nehmen ist; ferner $s = \frac{BI - CH}{HK} = \frac{5{,}88}{29{,}99} = 0{,}1960$

$t = fg = \sqrt{(BI'' - 2sq)} = \sqrt{(399{,}6001 - 54{,}9260)} = 18{,}565$

$n = \frac{2 \times 140{,}07}{19{,}99 + 18{,}565} = 7{,}265$

$\square BfgI = 140{,}0510$
$+ \square BbcI = 19{,}9325$
$159{,}9835$

4te Parcelle.

$q = 160''$ $s = 0{,}19606$, $2sq = 117{,}6650$
$+ 140{,}05$
$300{,}05$

$hi = t' = \sqrt{BI'' - 2sq} = 16{,}79$

$n' = \frac{2 \times 300{,}05}{19{,}99 + 16{,}79} = 16{,}315$ $n' - n = 9{,}05$ Inhalt $= 159{,}9814$

5te Parcelle.

$q = 140{,}05 + 160''\text{-} + 160''\text{-} = 460{,}05$ $2sq = 180{,}4000$

$mn = t'' = \sqrt{BI'' - 2sq} = 14{,}81$

$n'' = \frac{2 \times 460{,}05}{19{,}99 + 14{,}81} = 26{,}44$ $n'' - n' = 10{,}125$

Um die Theilung auf dem Lande abzustecken sind nun noch die Punkte a, b, f u. s. w. aus den folgenden Verhältnissen zu berechnen

$\frac{HD}{HN} = \frac{52,48}{47,933}$ $\frac{AB}{BM} = \frac{20,59}{17,943}$ $\frac{BC}{CL} = \frac{30,90}{29,90}$

wonach

Dd = 9,52	Aa = 9,98
dc = 9,03	ab = 9,465
cJ = 1,095	bB = 1,145
Ig = 7,955	Bf = 7,49
gi = 9,91	fh = 9,325
in = 11,085	hm = 10,435

§. 103.

Die Grundlinie AC des gleichschenklichten Triangels ABC, Fig. 24. ist kürzer, als die Grundlinie jedes anderen Triangels DBC, welcher den gleichen Flächenraum unter dem gemeinschaftlichen Winkel einschließt; denn richtet man, nach dem Verfahren bei der Verwandlung der Figuren, die Grundlinie DE für den gleichen Triangel DBE ein, so fällt, wie leicht zu erweisen, der Durchschnittspunkt F zwischen A und den Mittelpunkt M, und da BM > BG (§. 72.) so ist AC < DE weil sonst nicht AC . BM = DE . BG seyn könnte.

Anmerkung.

In Nro. 74. Traité de Topographie von L. Puissant findet man zwei analytische Beweise dafür, wovon der kürzere hier folgt:

$$AC \cdot BM = 2 \triangle ABC$$

$$AM = BM \cdot \cot. A$$

$$CM = BM \cdot \cot. C$$

$$AC = BM (\cot. A + \cot. C.)$$

$$= BM \cdot \frac{\sin. (A + C)}{\sin. A \sin. C}$$

$$= \frac{BM \sin. (A + C)}{\frac{1}{2} \cos. (A - C) - \frac{1}{2} \cos. (A + C)}$$

$$= \frac{BM \sin. (A + C)}{\frac{1}{2} \cos. (A - C) + \frac{1}{2} \cos. B}$$

Da nun der Werth $\frac{1}{2} \cos. (A - C)$ ein Maximum ist, wenn $A = C$, und $\cos. (A - C) = \cos. 0$, so ist der Werth des Quotienten, oder AC ein Minimum, wenn ABC gleichschenklicht ist.

§. 104.

Wenn der Inhalt q, und der Winkel b an der Spitze des gleichschenklichten $\triangle$ ABC gegeben ist, so findet man den Schenkel

$$AB = \sqrt{\frac{2q}{\sin. b}} \text{ indem}$$

$$BM = AB. \cos. \tfrac{1}{2} b$$

$$AM = \tfrac{1}{2} AC = AB \sin. \tfrac{1}{2} b$$

$$q = AM. BM = AB^{2} \sin. \tfrac{1}{2} b \cdot \cos. \tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{2} AB^{2} \sin. b$$

nach der bekannten Formel

$$\sin. 2 q = 2 \sin. q \cos. q$$

folglich $\frac{2 q}{\sin. B} = Ab^{2}$ und

$$AB = \sqrt{\frac{2 q}{\sin. b}}$$

Ist zum Beispiel

$q = 12''^{\circ}$ $b = 73^{\circ}, 44', 23,3''$, so ist

$$
\begin{array}{rl}
\text{l. } 2q = & 1,3802112 + 10 \text{ pro rad. tab.} \\
-\text{ l. sin. } b = & 9,9822712 \\
\hline
 & 1,3979400 \\
\hline
\text{davon } \tfrac{1}{2} = & 0,6989700 = \text{l. } 5 = AB \\
\text{l. } AB = & 0,6989700 \\
+\text{l. sin. } \tfrac{1}{2}b = & 9,7781512 - 10 \\
\hline
 & 0,4771212 = \text{l. } 3 = AM = \tfrac{1}{2} AC \\
\text{l. } AB = & 0,6989700 \\
+\text{l. cos. } \tfrac{1}{2}b = & 9,9030900 - 10 \\
\hline
 & 0,6020600 = \text{l. } 4 = BM
\end{array}
$$

§. 105.

Gesetzt man suchte das Minimum GH um ein bestimmtes Stück GADC von der Grundfläche ABCD, Fig. 25. abzuschneiden, so würde es zur Anwendung des Vorgehenden nur erforderlich seyn, die Seiten CB, DA bis zum Durchschnitt F zu verlängern, den Sinus des Winkels F, den Inhalt des $\triangle$ CDF, und hiernach FG, FH als die Schenkel des

$\triangle FGH = \triangle CFD - \square CDGH = q$ zu berechnen.

Es sey $\square$ CDGH zu 300 angesetzt

AD = 36,02 AL = 4,50 BL = 9° — DI = 8,02

CI = 19, —

wonach BE = 23,50 CE = 10 BC = 25,54

so ist $CF = \frac{BC \times CI}{CE} = 48{,}526$

$$IF = \frac{BE \times CI}{CE} = 44{,}65$$

$$DF = IF + ID = 52{,}67$$

$$\triangle\ CDF = \frac{DF \times CI}{2} = 500{,}3650$$

$$\triangle\ CDF - \square\ CDGH = 200{,}3650 = q$$

$$\log.\ \sin.\ F = l.\frac{CI}{CF} = 0{,}5927791 - 1$$

$$\log.\ \cos.\ F = l.\frac{IF}{CF} = 0{,}9638470 - 1$$

$$l.\ 2q = 2{,}6028519$$

$$-\,l.\sin.\ F = 0{,}5927791 - 1$$

$$3{,}0100728$$

davon $\frac{1}{2} = 1{,}5050364 = l.\ 31{,}99 = FG = FH$

daher $CG = CF - FG = 48{,}53 - 31{,}99 = 16{,}54$

$DA = 52{,}67 - 31{,}99 = 20{,}68$

Für die Verification hat man

$$l.\ GK = l.\ FG + l.\ \sin.\ F$$

$$= 1{,}5050364$$

$$+\ 0{,}5927791 - 1$$

$$1{,}0978155 = l.\ 12{,}526$$

$$l.\ FK = l.\ FG + l.\ \cos.\ F$$

$$= 1{,}5050364$$

$$+\ 0{,}9638470 - 1$$

$$1{,}4688834 = l.\ 29{,}436$$

und $HK = 31{,}99 - 29{,}436 = 2{,}554$

wonach $\square\ CDHG = 300{,}01$

Fünfter Abschnitt.

Die Kreuzscheibe.

§. 106.

Das einfachste Verfahren, die Größe und Figur einer Grundfläche zu bestimmen, besteht in der Verbindung ihrer Endpunkte durch rechtwinklichte Coordinaten. Die unmittelbare Vermessung derselben ist nur bei Gegenständen von geringer Breite üblich. Diese kommen aber, es sey nun an und für sich selbst, oder im Zusammenhang mit größeren Flächenstücken, am meisten in der Ausübung vor.

Bei Flurvermessungen ist dieses Verfahren zur genaueren Bestimmung der einzelnen Felder im Gebrauch, bei der Aufnahme weitläuftiger Figuren dazu dienlich, manche vorkommende Hindernisse zu beseitigen und ungelegene Ecken wegzuschaffen.

Man verlangt Fig. 18. T. VI. die Diagonale AF. Unebenheiten des Bodens, oder ein dichtes Gebüsch verhindern das Durchsehn und Ausmessen derselben. Es ist aber möglich, die wenig abweichende Linie Af nebst

der senkrechten Ff zu messen, und die verlangte Linie ergibt sich als Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks AFf.

Die Kreuzscheibe ist daher eins der nützlichsten Werkzeuge des praktischen Geometers. Wie sie zur Aufnahme größerer Gegenstände anzuwenden und in ihrer gewöhnlichen Einrichtung zu verbessern wäre, haben mehrere Schriftsteller gezeigt.

Die folgenden Bemerkungen berühren nur dasjenige, worauf es in der zuverlässigen und fertigen Behandlung desselben hauptsächlich ankommt.

Der Gemeinnützigkeit wegen wird dabei nur die bekannte Vorrichtung gefordert, welche aus zwei senkrecht verbundenen, mit einer Stellschraube und doppelten Diopter versehenen Alhidadenregeln besteht, die sich auf einem lothrecht gestellten Stabe horizontal herumdrehen lassen.

§. 107.

Wenn die Ziellinien dieses Werkzeugs sich mit den Schenkeln der rechten Winkeln bei der Horizontalbewegung beständig in einer Verticalebene befinden, welches nicht schwer fällt, wenigstens so genau zu bewerkstelligen, als die Höhe der Diopter es erfordert, so gewähren sie den Vortheil, daß man sich geschwinder und zuverlässiger selbst, als mit Zuziehung eines Gehülfen in die Linie zweier gegebenen Punkte einrichten kann. Stellt man Fig. 26. T. VII. das Instrument in C, und rich-

tet die Regel ab auf A, so muß man rücklings von b über a den Punkt B erblicken. Stünde es in D, so würde man an B vorbeisehen, und aus der Größe B'B verglichen mit CB beurtheilen, wie viel man etwa aus der Linie AB gewichen wäre, und die Stellung darnach verbessern.

§. 108.

Wenn das Instrument aber in der Verlängerung AV, der Linie AB aufgestellt werden soll, so darf dies nicht durch die Diopteru geschehen, wegen der Parallaxe, die aus der Dicke des Stabes bei A entsteht, besonders wenn dieser sehr nahe ist; alsdann wird der Stab der Kreuzscheibe wie ein Pickelstab eingerichtet, indem man seine Stellung so lang verändert, bis seine Seiten mit jenen der andern Stäben in geraden Linien erscheinen.

§. 109.

Zur Berichtigung stellt man das Instrument in einem schicklichen Ort M auf, Fig. 27. T. VII., und läßt in beiläufig gleichen Entfernungen die Stäbe A, B nach den Richtungen ab und ba der Alhidadenregel lothrecht aufstellen, so wie auch den Stab D nach der Richtung der Regel cd, so weit der Boden und die Schärfe des Auges es zulassen. Hiernach wendet man die Scheibe um, und richtet ab auf den Stab B ein; erblickt man nun den Stab D in der Richtung dc, so ist das Instrument für die Entfernung MD berichtigt.

Trifft dies nicht zu, so läßt man den Stab E nach der Richtung dc in die Parallele DE, so gut sie der Gehülfe nach dem Augenmaß erkennen kann, einsetzen, und hierauf in die Mitte F von DE rücken. Man zieht nun die Regel dc vermittelst der Stellschraube so weit an, bis sie mit F eine gerade Linie bildet. Ist dieses geschehen, so wendet man die Scheibe wieder um und richtet ab auf A. Erblickt man jetzt durch die Regel cd den Punkt F, so sind die Winkel berichtigt. Ist dies nicht, so läßt man wieder einen Stab in die Richtung cd setzen und verfährt wie vorhin, bis der Endzweck erreicht ist. Man zieht nun die Verbindungsschraube so fest an, als thunlich. Da sich aber die Winkel hierdurch wieder etwas verschieben können, so untersucht man sie aufs neue, um sie nöthigenfalls wieder zu berichtigen; und diese Vorsicht darf bei keiner bedeutenden Messung vernachlässigt werden. Daß man alle Sorgfalt auf die lothrechte Stellung verwenden muß, versteht sich übrigens von selbst.

§. 110.

Zur Verification der Ordinaten eines Vierecks ABCD, Fig. 34. T. III. müssen alle Seiten desselben gemessen seyn, und es kommt hier hauptsächlich darauf an, daß die Seite BC der Hypothenuse des rechtwinklichten △ BGC entspreche. Denn wenn die Abscissen Ab, Dc nach Verhältniß der Perpendickel sehr klein sind, so wird die Differenz einiger Zolle darin keinen bemerkbaren

Einfluß auf die Berechnung der Hypothenusen AB, CD oder der Perpendickel Bb, Cc haben.

Setzt man z. B. AB = 10, Ab = 0,20, so ist

$Bb = \sqrt{99,96} = 9,998.$

Setzt man AB = 10 Ab = 0,10, so ist Bb = 9,999

§. 111.

Bei kleinen Abscissen ist man so nahe an den Enden der Abcissenlinie, daß es schwer ist, sich so genau darin einzurichten, daß die Perpendickel nicht um etwas zu groß oder zu klein genommen werden. Da nun ein kleiner Fehler in der Abscisse keinen Einfluß auf die Berechnung des Perpendickels hat, so wird man diesen bequemer und genauer aus der quadratischen Differenz der Hypothenuse und Abscisse, als aus der unmittelbaren Vermessung erhalten. Es fragt sich aber hierbei, ob eine kleine Abweichung aus der Linie nicht selbst auf die Bestimmung der kleinen Abscissen einen zu merklichen Einfluß habe, als daß man diesen bei der Berechnung außer Acht lassen könne?

§. 112.

Gesetzt, man habe anstatt der wahren Coordinaten y = AB, x = a = Ae zur Bestimmung des Triangels BDE, Fig. 28. T. VII. die irrigen Coordinaten A′B, A′E aufgenommen, und die Abweichung AC = p sey so gering, daß man CE = AE setzen könne, so wäre nach §. 73.

$A'B = y - nx$, $A'E = x = ny$, folglich
$ny = A'C$ die Differenz der Abscisse
$nx = AB - A'B$ die Differenz des Perpendickels
und $nx > ny$ wenn $AE > AB$

Setzt man $p = AC = 0{,}05$, $y = AB = 10$,
$x = AE = CE = 50$

so folgt $n = p/h = \frac{0{,}05}{50} = 0{,}001$

$ny = 0{,}01 \quad nx = 0{,}05$

Man müßte aber sehr unachtsam zu Werke gehen, wenn die Abweichung AC mehr als zwei Zoll betragen sollte, und setzt man $AC = 0{,}02$, so wird selbst, wenn man AE auf 25 Ruthen herabsetzt, die Größe A′C nur 0,008 ausmachen, und nx als die Differenz des Perpendickels, hingegen 0,02 betragen.

Da man wegen der geringeren Höhe p aber auch die kleinere Abscisse $DA' = DA - A'C$ und folglich ihre Differenz wegen der Abweichung p auf 0,008 setzen kann, so wird die Wurzel aus der quadratischen Differenz der Linien DA′ und BD von dem wahren Perpendickel um keine bemerkbare Größe verschieden seyn, wenn die wahre Abscisse DA der Voraussetzung gemäß nicht groß ist.

§. 113.

Wollte man den Perpendickel durch die größere Abscisse, vermittelst des Ausdrucks $\sqrt{(BE'' - A'E'')}$ bestimmen, so würde man beiläufig um eben so viel, als durch das Maaß von A′B fehlen, und es würde

zweckmäßiger seyn, das Instrument mit aller Sorgfalt in die wahre Linie DE einzurichten, wonach denn eine kleine Abweichung zur Rechten oder Linken des Punkts A keinen Einfluß auf das Maaß des Perpendickels haben kann. Die Ursache, warum die Resultate der Berechnung und unmittelbaren Vermessung in diesem Fall aber so verschieden sind, gibt der Anblick der 29sten Figur T. VII. zu erkennen.

Geht man bei der Vermessung von dem Punkt A′ aus, so erhält man die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks ABA′, die von AB, wegen der geringen Abweichung AA′ nicht verschieden gefunden wird.

In der Berechnung des Ausdrucks $\sqrt{(BD^{2} - A'D^{2})}$ legt man aber für jeden andern Punkt A′ ein anderes Dreieck DB′A′ zu Grund, und je größer dabei die wahre Abscisse DA ist, je größer muß die Folge des Fehlers wegen der Abweichung AA′ seyn. Setzt man

$$BD = h$$
$$AD = a$$
$$A'D = a + d, \text{ so folgt}$$
$$AB^{2} = BD^{2} - AD^{2} = h^2 - a^2$$
$$A'B'^{2} = B'D^{2} - A'D^{2} = h^2 - a^2 - 2ad - d^2$$

und je größer a, desto größer ist die Differenz $2ad + d^2$

§. 114.

Die Uebersicht der folgenden Verhältnisse wird zur Erläuterung des Vorgehenden, und zu einer beiläufigen Richtschnur in der Ausübung dienen.

Hypot.	Absc.	Perp.	Hypot	Absc.	Perp.
10	1,—	9,950	5	1,—	4,899
	1,01	9,949		1,01	4,897
	1,02	9,948		1,02	4,895
	1,10	9,939		1,10	4,877
	2,—	9,798		2,—	4,582
	2,01	9,796		2,01	4,578
	2,10	9,777		2,10	4,538
	3,—	9,539		3,—	4,—
	3,01	9,536		3,01	3,992
	3,10	9,507		3,10	3,923
	4,—	9,165		3,11	3,915
	4,01	9,161		3,20	3,841
	4,10	9,121		3,21	3,834
	5,—	8,660		3,30	3,756
	5,01	8,654		3,31	3,747
	5,10	8,602		3,40	3,666
	6,—	8,—		3,41	3,657
	6,01	7,992		3,50	3,571
	6,10	7,924		3,51	3,561
	7,—	7,141		3,60	3,470
	7,01	7,131		3,61	3,460
	7,10	7,042		3,70	3,363
	8,—	6,—		3,71	3,352
	8,01	5,986		3,80	3,250
	8,10	5,864		3,81	3,238
	9,—	4,359		3,90	3,129
	9,01	4,338		3,91	3,106
	9,10	4,146		4,—	3,—
	9,50	3,122		4,01	2,987
	9,51	3,091		4,10	2,862
	9,60	2,800		4,11	2,847
	9,61	2,765		4,12	2,833

§. 115.

Die Grenze der Fehler, die man im Visiren durch ein Diopterlineal begehen kann, wird §. 201. II. Theil der praktischen Geometrie von T. Mayer auf 5 Minuten gesetzt. Wenn man also Fig. 30. von C auf E anlegen will, und den irrigen Punkt D erzielt, so wird hiernach die Abweichung DE, als Tangente des Winkels ECD, beiläufig 15 Zoll betragen, wenn DE 100 Ruthen lang ist. Dies führt zu der Untersuchung, wieviel man in diesem Fall bei der Einrichtung der Coordinaten des Punktes B wohl irren könne. In dieser Entfernung ist es nicht mehr möglich, einen gewöhnlichen Picketstab durch die Diopteru zu erkennen, und man pflegt einen Gehülfen dahinter zu stellen, dessen Mitte man im Visiren zu treffen sucht.

§. 116.

Beschreibt man, Fig. 30. T. VII., aus der Mitte M der Linie BD, welche die Endpunkte der Perpendickel AB, ED vereinigt, einen Kreis, so zeigen die Durchschnittspunkte C, F, daß es zwei Oerter in der Abscissenlinie AE gibt, woraus man die Punkte B, D unter einem rechten Winkel erblickt. Um die Entfernungen AC, AF dieser Oerter zu berechnen, hat man

$$BCD = R = BFD$$

$$ABC + ACB = R = DCE + ACB, \text{ daher}$$

$$ABC = DCE$$

und wegen der hieraus folgenden Aehnlichkeit der Triangel ABC und ECD die Proportion

$$AB : AC = CE : DE$$

oder wenn man $AB = a$, $DE = b$, $AE = c$ als bekannte Größen voraussetzt

$$a : z = c - z : b$$

$$cz - z^2 = ab$$

$$z = \tfrac{1}{2} c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 - ab)} \text{ wonach}$$

$$AC = \tfrac{1}{2} c - \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 - ab)}$$

$$AF = \tfrac{1}{2} c + \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 - ab)}$$

$$AC + AF = c \text{ und}$$

$$AC = EF$$

wonach BC sich als Hypotenuse des rechtwinklichten Dreiecks ABC ergibt.

§. 117.

Ist $ab = \tfrac{1}{4} c^2$ oder $\sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 - ab)} = 0$, so ist $AC = AF = \tfrac{1}{2} c$; die Punkte C, F fallen zusammen, und AE ist eine Tangente.

Ist $ab > \tfrac{1}{4} c^2$, so ist z unmöglich, und es findet kein Durchschnittspunkt statt.

§. 118.

Wird die entgegengesetzte Abweichung DE, Fig. 31. in Betrachtung gezogen, so findet man

$$AB : AC = EC : ED$$

$$a : z = c + z : b$$

$$cz + z^2 = ab$$

$z = AC = - \frac{1}{2} c + \sqrt{(\frac{1}{4} c^2 + ab)}$ und dieser Werth ist von dem vorgehenden §. 116. nur darin verschieden, daß er positiv und jener negativ zu nehmen ist; denn wenn die Größen a, b, c in beiden Fällen dieselben sind, so ist

$$cz + z^2 = ab = cz - z^2$$
$$c + z = c - z$$
$$z = - z$$

§. 119.

Da man in der Entfernung von 100 Ruthen, oder 1200 Schuh rheinisch Maaß, die Mitte eines Gegenstandes von zwei Dezimal-Schuh Breite durch die Dioptern noch ziemlich gut schätzen kann, so darf man die größte Abweichung DE auch nicht über einen Schuh in Anschlag bringen. Um hiernach die Abweichung AC Fig. 30. zu bestimmen, sey

$a = 10 = AB$ der wahre Perpendickel
$b = 0,10 = ED$
$c = 100 = AE$; hiernach ist
$AC = \frac{1}{2} c - \sqrt{(\frac{1}{4} c^2 - ab)} = 0,01$ §. 116.
$= - \frac{1}{2} c + \sqrt{(\frac{1}{4} c^2 + ab)} = 0,01$ (§. 118.
und $BC = \sqrt{(10^{''} - 0,01^{''})} = 10 = AB$

Setzt man
AB = 20, so folgt AC = 0,02
30 „ = 0,03
40 „ = 0,04
50 „ = 0,05

Obschon diese Differenzen keinen Einfluß auf die Berechnung der Perpendickel haben, so können sie doch bei der Verification §. 110. nicht unbeachtet bleiben.

§. 120.

Nimmt man AE zu 50 Ruthen an, und DE = 0,10

AB = 5,	so ist AC =	0,01
10	=	0,02
20	=	0,04
30	=	0,06
40	=	0,08
50	=	0,10

Setzt man ferner AE = 25°, D = 0,10

AB = 5,	so ist AC =	0,02
10	= =	0,04
20	= =	0,08
30	= =	0,12
40	= =	0,16
50	= =	0,20

Wenn aber die Folgen des Fehlers immer größer werden, so wie AE abnimmt, so zieht sich die Grenze der Ungewißheit über DE auch immer näher zusammen, die man für die Entfernung von 25 Ruthen nicht mehr über ein paar Zoll hinaussetzen darf.

§. 121.

Um die Folgen der vereinigten Abweichungen §. 112 und 115. zu berechnen, sind zweierlei Fälle zu betrachten.

1.

Die Abweichungen AC und ED können auf eine und ebendieselbe Seite von AE fallen. Trifft es sich hierbei zu, daß CD und AE Parallellinien sind, Fig. 32. so ist die Differenz der Abscisse o und die Differenz des Perpendickels = AC.

2.

Sie können auf entgegengesetzte Seiten fallen, und in diesem Fall werden ihre Folgen am größten seyn.

Wenn Fig. 32. AB = 10, AE = 50 AC′ = 0,02 und die Alhidadenregel genau auf den Punkt E angelegt wird, so ist

$A'B = AB + nx = 10{,}02$

$A'E = AE - AC' = 49{,}996$

Zeigt die Regel aber auf D, und es ist ED = 0,10 = b, so erhält man

BC für $A'B = 10{,}02 = a$

CE für $A'E = 49{,}996 = c$

es ergibt sich

$A'C = \frac{1}{2} c - \sqrt{(\frac{1}{4} c^2 - ab)} = 0{,}02$

$BC = 10{,}02$

$CE = A'E - A'C = 49{,}976$ und die Differenz

$AE - CE = 50 - 49{,}976 = 0{,}024$ kann auch hier keine bemerkbare Folge in der Berechnung des Perpendickels haben, §. 6. Man wird

$$\sqrt{HB^2 - (HA + 0{,}024)^2} = \sqrt{HB^2 - HA^2} = AB$$

finden.

§. 122.

Ist die Kreuzscheibe nur mit einfachen Dioptern versehen, so ist es mühsamer, die reine Abcissenlinie damit einzuhalten.

Hat man Fig. 34. den Perpendickel BC auf AE zu errichten, so kann man in der Stelle D der Nebenlinie AG den Punkt B unter einem rechten Winkel erblicken. Wendet man hier die Alhidadenregel, welche gegen A gerichtet war, nach dem Punkt E um, so wird die sie durchkreuzende Regel nicht auf B, sondern auf einen Nebenpunkt F zeigen; dieses darf man nun der Unvollkommenheit des Werkzeugs nicht beimessen, und man würde durch Hin- und Herrücken in der Linie AG sich vergebens bemühen, den wahren Punkt C zu finden. Hätte man es in d aufgestellt, so würde man nach der Umwendung den Nebenpunkt f, zwischen B und A sehen; im ersten Fall, die Stellung also nur dadurch berichtigen können, daß man es nach der Richtung BC von dem Punkt B entfernte und im zweiten demselben näher brächte.

Diese Verification darf man aber auch mit einem andern Werkzeug nicht vernachlässigen, wenn man sich nicht zu nahe an den Enden der Abscissenlinie befindet. Das Verfahren §. 111., welches in diesem Fall den Vorzug verdient, ist besonders bei Flurvermessungen ein großes Mittel, die Arbeit abzukürzen, wenn man mit Wurzeltafeln quadratischer Differenzen versehen ist, die man übrigens, so weit es hierbei erforderlich ist, da die

wenigsten Aecker über 10 Ruthen breit sind, sehr leicht aus den gemeinen Wurzeltafeln, wie sie wohl jeder praktische Geometer besitzt, aufstellen kann.

Sind z. B. Fig. 35. T. VII. die in einer Feldgewanne liegenden Stücke ag, bf, ce u. s. w. zu vermessen, so nimmt man, nebst den Längenseiten, nur das Maaß der Seiten ab, hg u. s. w., wie sie ohnedies schon zum Behuf vollständiger Flurbeschreibungen gefordert werden, und der Abscissen aa′, hh′, u. s. w. Man erspart das Messen der Perpendickel, und erhält diese genauer durch die Berechnung nach §. 111., wozu die Bestimmung der Abscissen nun auch weniger Mühe erfordert.

Werden die Ordinaten, wie hier, in jedem Felde auf eine und eben dieselbe Grundlinie bezogen, so kommen bei der Verification §. 110. zugleich diejenigen Fehler zum Vorschein, welche in der Messung der Längenseiten begangen worden sind.

§. 123.

Da man mit jeden drei geraden Linien ein Dreieck beschreiben kann, insofern nur jede kleiner als die Summe der beiden andern ist, so sind die drei Seiten zur Berichtigung des Dreiecks nicht genug; daher läßt sich kein Viereck aus dem gegebenen Umfang mit einer der beiden Diagonalen allein berichtigen. Sind Fig. 36. T. VII. die Coordinaten Ab, Bb, Ad, Dd auch gegeben, so können diese und die Seiten des Vierecks als

die Hypotenusen der rechtwinklichten Triangel ABb, ADd u. s. w. wechselseitig der Verification unterzogen werden. Sind die Perpendickel sehr groß, und zieht man vor, sie aus den Seiten der Triangel ABC, ADC zu berechnen, so muß die zweite Diagonale BD zur Verification gemessen werden. Wenn

AB = 85,44 BC = 123,69 CD = 113,11 DA = 122,62
AC = 200

so erhält man

$$
\begin{aligned}
Ad &= 105{,}60 \\
Ab &= \underline{80{,}-} \\
bd &= 25{,}60 = \delta \\
Dd &= 62{,}317 \\
Bb &= \underline{29{,}995} \\
\text{Summe} &= 92{,}312 = s
\end{aligned}
$$

und es muß

$BD = \sqrt{(\delta^2 + s^2)} = 95{,}796$ oder sehr nahe 95,80 gefunden werden.

§. 124.

Es kann geschehen, daß man den Inhalt eines Vierecks aus der Berechnung der Seiten und der Diagonale größer oder kleiner als die Summe seiner Parcellen findet, weil die meisten Perpendickel in der Vermessung der Parcellen, wegen Vernachlässigung oder Kompensation der niedern Maaßabtheilungen, um etwas zu klein oder zu groß genommen worden sind; es ist aber auch möglich, daß beide Fälle den entgegengesetzten Fehler in der Vermessung der Diagonale anzeigen. Durch

die Vergrößerung einer der drei Seiten eines Dreiecks kann der Inhalt sowohl abnehmen als zunehmen.

§. 125.

Beschreibt man mit der Seite AB des rechtwinklichten Dreiecks ABC, Fig. 37. T. VII. einen Halbkreis, und hierin die beiden Nebendreiecke A'BC auf der gemeinschaftlichen Seite BC, so zeigt sich die Fläche eines jeden derselben desto geringer, je größer die veränderliche Seite A'C zur Linken, oder je kürzer dieselbe zur Rechten der Seite AB ist, und so kann man, wie es außerdem auch leicht zu übersehen ist, durch die Vergrößerung der wahren Diagonale eines Vierecks zu viel oder zu wenig für die Fläche desselben, oder das Entgegengesetzte im umgekehrten Fall dafür erhalten.

Sechster Abschnitt.

Neue Methode, den Flächeninhalt und die Konstruction jedes Vielecks aus den Seiten und Peripheriewinkeln zu berechnen.

§. 126.

Lehrsatz.

Bezeichnet man durch ABC ..... X, Y die Winkel eines Vielecks, Fig. 1 — 3. Tab. VIII., durch AB, BC..... XY, YA die nach der Ordnung der Winkel auf einander folgenden Seiten, und setzt man

$$R = 90^\circ$$
$$2R - A = a$$
$$4R - (A + B) = b$$
$$6R - (A + B + C) = c$$
$$\vdots$$
$$2nR - (A + B + C \ldots + X) = x$$

wo n die Anzahl der Seiten weniger eine, und X den vorletzten Winkel bedeutet, so ist

$$Ba = AB \sin. a$$
$$Cb = AB \sin. a + BC \sin. b$$
$$Dc = AB \sin. a + BC \sin. b + CD \sin. c$$
$$\vdots$$
$$Xw = AB \sin. a + BC \sin. b \ldots\ldots + WX \sin. w$$

und

$$AB \sin. a + BC \sin. b \ldots\ldots XY \sin. x = 0$$

II.

$$Aa = AB \cos. a$$
$$Ab = AB \cos. a + BC \cos. b$$
$$Ac = AB \cos. a + BC \cos. b + CD \cos. c$$
$$\vdots$$
$$Aw = AB \cos. a + BC \cos. b \ldots\ldots + WX \cos. w$$

und

$$AB \cos. a + BC \cos. b \ldots + XY \cos. x + AY = 0$$

III.

der Flächeninhalt $Q = AB \sin. a \ {}^1/_2\ AB \cos. a$

$$+ BC \sin. b\ (AB \cos. a + {}^1/_2\ BC \cos. b)$$
$$+ CD \sin. c\ (AB \cos. a + BC \cos. b + {}^1/_2\ CD \cos. c)$$
$$\vdots$$
$$+ XY \sin. x\ (AB \cos. a + BC \cos. b \ldots + {}^1/_2\ XY \cos. x)$$

B e w e i s.

Man verlängere die Grundlinie AY zu beiden Seiten, errichte in beliebiger Entfernung AZ zur Seite Y

eine senkrechte Linie, und ziehe die Parallelen B 1, C 2 D 3 .... Denkt man sich nun die Entstehung des Vielecks aus der Umdrehung der Linie AV in die Lage AB, von dieser um den Mittelpunkt B in die Lage BC, und so weiter, so führt man diese Linie durch den Bogen $a = 2R - A$ in die Lage AB; von da durch $2R - B$ in die Lage BC, und in der Summe dieser Abweichungen besteht der Abweichungsbogen

$$b = a + 2R - B = 4R - (A + B)$$

eben so erhält man den folgenden

$$c = b + 2R - C = 6R - (A + B + C)$$

In Fig. 2 und 7. ist der Winkel C konvex und die Verlängerung von BC bewegt sich rückwärts in die Lage CD, man hat hier den äußeren Winkel $2R - (4R - C) = C - 2R$ zu subtrahiren, oder wie vorhin, wieder $2R - C$ zu addiren, und so erhellet das beständige Gesetz, wonach sich jeder folgende aus allen vorgehenden Abweichungsbogen ergibt.

Die Ergänzungen der Abweichungsbogen zu 180° und zu 360° sind die Maaße der Winkel, welche die Seiten mit den Parallelen machen, und da man die Vergrößerung der Abweichungsbogen als Folge der Kreisbewegung betrachtet, wofür der 1te Quadrant oberhalb der Grundlinie und ihrer Parallelen nach der Richtung ZV angenommen wird, so zeigen die Endigungen dieser Bogen im 1ten, 2ten, 3ten und 4ten Quadranten die positive und negative Beschaffenheit der trigonometrischen Linien jener Winkel an, und hiernach ist

I.

Ba = AB sin. a, die senkrechte Entfernung des Punktes B oberhalb oder unterhalb der Grundlinie, je nachdem sin. a positiv oder negativ zu nehmen ist.

Cb = AB sin. a + BC sin. b, die Entfernung des Punktes C von der Grundlinie; und nach diesem Fortgang erhält man den Ausdruck

AB sin. a + BC sin. b .... + XY sin. x = o für den Abstand des Endpunkts Y, von der Grundlinie.

II.

Aa = AB cos. a die Entfernung des Punktes B nach der Richtung AV oder AZ, je nachdem cos. a positiv oder negativ ist.

Ab = AB cos. a + BC cos. b die Entfernung des Punktes C, und so fort

AB cos. a + BC cos. b .... + XY cos. x + AY = o

III.

Wenn man z = AZ setzt; die Parallelen

B 1 = z + Aa = z + AB cos. a

C 2 = z + Aa — ab

= z + AB cos. a + BC cos. b

so fort

Xn = z + AB cos. a + BC cos. b .... + XY cos. x

wonach

$$AB \sin. a \frac{(2z + AB \cos. a)}{2} = AB \sin. a\,(z + \tfrac{1}{2} AB \cos. a)$$

die positive oder negative Fläche des ersten Trapez AB 1 Z ausdrückt, je nachdem sin. a positiv oder negativ ist, ferner

$BC \sin. b (z + AB \cos. a + \frac{1}{2} BC \cos. b)$ das 2te Trapez und so fort

$XY \sin. x (z + AB \cos. a + BC \cos. b \ldots + \frac{1}{2} XY \cos. x)$ das letzte Trapez. Der Flächeninhalt Q des Vielecks besteht aus der algebraischen Summe dieser Trapezien, wovon z. B. in Fig. 1. die drei ersten AB1Z, BC21, CD32 positiv, und die folgenden DW43, WXn4, XYZn, negativ sind. Da aber

$AB \sin. a + BC \sin. b \ldots + XY \sin. x = 0$, wonach auch

$z (AB \sin. a + BC \sin. b \ldots + XY \sin. x) = 0$

so reduzirt sich der Ausdruck dieser Summe auf

$$\begin{aligned} Q = & AB \sin. a \tfrac{1}{2} BC \cos. a \\ & + BC \sin. b (AB \cos. a + \tfrac{1}{2} BC \cos. b) \\ & + CD \sin. c (AB \cos. a + BC \cos. b + \tfrac{1}{2} CD \cos. c) \\ & \vdots \\ & + XY \sin. x (AB \cos. a + BC \cos. b \ldots + \tfrac{1}{2} XY \cos. x) \end{aligned}$$

und durch die Elimination von z wird die senkrechte Linie aus Z in A versetzt. Siehe Fig. 5 und 7.

§. 127.

Die Anwendung dieser Formeln zeigt die ausführliche Berechnung des Sechsecks Fig. 5. in dem Anhang A. Man findet in der 1ten Spalte dieser Tabelle die gegebenen Seiten

$AB = 2400°$, $BC = 3000°$, $CW = 1000°$, $WX = 1100°$, $XY = 1000°,04$

ausser der Grundlinie $AY = 1717°,52$

In II. die successiven Summen der gegebenen Winkel

$$
\begin{aligned}
A &= 80^\circ, 46' \\
B &= \underline{90, -} \\
& \quad 170^\circ, 46 \\
C &= \underline{20, -} \\
& \quad 190, 46 \\
W &= \underline{210, -} \\
& \quad 400, 46 \\
X &= \underline{240, -} \\
& \quad 640, 46
\end{aligned}
$$

addirt man hierzu den letzten Winkel $Y = 79^\circ, 14$, welcher nicht in die Berechnung gezogen wird, so erhält man $720^\circ = 4 \times 180^\circ$ als Summe der Polygonwinkel des Sechsecks.

In III. die Abweichungsbogen

$$
\begin{aligned}
a &= 2\,R - A \\
b &= 4\,R - (A + B) \\
c &= 6\,R - (A + B + C) \text{ u. s. w.}
\end{aligned}
$$

In IV. die Reduction der Abweichungsbogen auf den 1ten Quadranten, mit den Zeichen der zugehörigen Sinus und Kosinus, nach dem trigonometrischen Gesetze

$$
\begin{aligned}
\sin. q &= + \sin. (2\,R - q) \\
&= - \sin. (2\,R + q) \\
&= - \sin. (4\,R - q) \\
\cos. q &= - \cos. (2\,R - q) \\
&= - \cos. (2\,R + q) \\
&= + \cos. (4\,R - q)
\end{aligned}
$$

Geht nämlich der Bogen q über 90°, so subtrahirt man denselben von 180°, und gibt dem Sinus des Rests das positive, und dem Kosinus das negative Zeichen.

Ist q über 180°, so zieht man 180° davon ab, und bezeichnet den Sinus und Kosinus des Rests negativ.

Ist q über 270°, so subtrahirt man q von 360° und nimmt den Sinus des Rests negativ, den Kosinus hingegen positiv

Geht endlich q über 360°, so zieht man den ganzen Kreis oder sein Vielfaches von q ab, und verfährt mit dem Rest, wie in den vorgehenden drei Fällen.

In V. die Größen AB sin. a, BC sin. b u. s. w.
" VI. die successiven Summen derselben.
" VII. die Größen AB cos. a, BC cos. b u. s. w.
" VIII. die successiven Summen derselben
" IX. die Größen $\frac{1}{2}$ AB cos. a
AB cos. a + $\frac{1}{2}$ BC cos. b
AB cos. a + BC cos. b + $\frac{1}{2}$ CD cos. c
u. s. w.

In X und XI die positiven und negativen Produkte
AB sin. a $\frac{1}{2}$ AB cos. a
BC sin. b (AB cos. a + $\frac{1}{2}$ BC cos. b) u. s. w.
der Größen in V und IX.

§. 128.

Aus den berechneten Coordinaten der Ecken A, B, C... ist es nun leicht, das Vieleck zu verzeichnen.

Man trägt die Abscissen Aa, Ab, Ac.... auf die Grundlinie AY, nach der Richtung YA, wenn sie positiv in der VIII. Spalte bezeichnet sind, und nach der entgegengesetzten Richtung, wenn sie negativ sind. Man errichtet hierauf die positiven oder negativen Perpendickel der Spalte VI. und verbindet deren Endpunkte durch die geraden Linien AB, BC u. s. w.

§. 129.

Durch die Aufstellung der Coordinaten Aa, Ba, Ab, Cb u. s. w. werden die Vielecke in Trapezien und Triangel zerlegt, woraus der Flächeninhalt sich ebenfalls, und in manchen Fällen noch einfacher berechnen läßt.

So findet man Fig. 1. den Flächeninhalt aus der Summe der Trapezien aBCb, bCDc, cDWd, dWXw, nach Abzug der Triangel ABa und YXw, deren Dimensionen durch die VI und VIIIte Spalte gegeben werden.

§. 130.

Obschon die Grundlinie AY und der letzte Winkel Y nicht in die Berechnung kommen, so müssen diese Stücke dennoch zur Verification gegeben seyn, die man hiermit auf eine doppelte Art erhält. Die VIte Spalte muß sich nicht nur auf Null reduziren, sondern auch die VIIIte, wenn man die Grundlinie zu der letztern addirt, und der Winkel Y ist zur Verification aus der Summe der Polygonwinkel erforderlich.

In der Ausübung wird man diesen Resultaten indessen nur so nahe kommen, als es von den Bestimmungen der Seiten und Winkel und von den Aproximationen der trigonometrischen Linien zu erwarten ist, und die Abweichungen davon werden den Grad der Genauigkeit angeben, den man erreicht hat, wenn kein Rechnungsfehler begangen worden ist.

§. 131.

In der Tabelle B ist die Berechnung desselben Sechsecks nach Fig. 3. auf die im Vorgehenden mit XY bezeichnete Seite von 1000°,04 als Grundlinie AY bezogen worden, so daß die Seiten und Winkel in folgender Ordnung vorkommen:

AB = 1100°, BC = 1000°, CW = 3000°,
WX = 2400°, XY = 1717°,52

A = 240°, B = 210°, C = 20° W = 90°,
X = 80°,46′, Y = 79°,14′

Hier findet man die beiden negativen Abweichungsbogen

a = — 60°
b = — 90°

und es ist zu bemerken, daß die negative, oder von 0 bis zu 360° rückwärtslaufenden Bogen, mit den positiven, von 360° bis 0° laufenden Bogen übereinstimmen, wonach

sin. — 60° = sin. 300° = — sin. 60°

cos. — 60° = cos. 300° = + cos. 60°

sin. — 90° = sin. 270 = — 1

cos. — 90° = cos. 270 = 0

§. 132.

Für die Berechnung des Siebenecks, Fig. 2 und 7 in der Tabelle C ist

$AB = 1500° — BC = 1700° — CD = 1800°,$
$DW = 1600°, WX = 1500° —$

$XY = 2261,06$ und die Grundlinie $AY = 546° —$

$A = 142°, 30'$ $B = 24°, 15'$ $C = 244°, 10',$
$D = 35°, —$ $W = 242°, 5'$

$X = 20°$ und der letzte Winkel $Y = 192°$ —

Durch die 1te Größe in X wird hier die Fläche des rechtwinkl. Triangels ABf, Fig. 7. ausgedrückt.

Die 1te Größe in XI entspricht der Differenz der beiden rechtw. Triangel Bhf und Chg, wovon der erstere und größere negativ ist; dieses einzusehen, nehme man Fig. 8.

$Bg' = Cg$, so ist auch $h'g' = hg$, $\triangle Bg'h' = \triangle Cgh$ und $\triangle Bfh - \triangle Cgh = \square fhh'g'$

$$= (fh + hg) \frac{(Bf - Cg)}{2}$$

$$= fg \frac{(Bf - Cg)}{2}$$

$$= fg (Bf - \tfrac{1}{2} Bf - \tfrac{1}{2} Cg)$$

$$= BC \sin. b \, (AB \cos. a + \tfrac{1}{2} BC \cos. b)$$

Da Bf Fig. 7. mit Aa Fig. 2. und fg Fig. 7. mit dem Abstand der Parallelen 1, 2, Fig. 2. übereinstimmt.

§. 133.

Für die Berechnung eines Quadrats, nach dem Vorgehenden,

wäre $\sin. a = \sin. 90^\circ = 1$, $\cos. a = 0$

$\sin. b = \sin. 180 = 0$, $\cos. b = -1$

$\sin. c = \sin. 270 = -1$, $\cos. c = 0$

und wenn die Seite desselben $= 1$ gesetzt wird

$$\sin. a \, \tfrac{1}{2} \cos. a = 0$$
$$\sin. b \, (\cos. a + \tfrac{1}{2} \cos. b) = 0$$
$$\sin. c \, (\cos. a + \cos. b + \tfrac{1}{2} \cos. c) = 1$$
$$Q = 1$$

§. 134.

Für das gleichseitige Dreieck, dessen Seite $= n$ hätte man

$\sin. a = \sin. 120^\circ = \sin. 60$

$\cos. a = -\tfrac{1}{2}$

$\sin. b = \sin. 240 = -\sin. 60$

$\cos. b = -\tfrac{1}{2}$

Folglich

$$n \sin. a \, \tfrac{1}{2} n \cos. a = -\tfrac{1}{4} n^2 \sin. 60^\circ$$
$$n \sin. b \, (n \cos. a + \tfrac{1}{2} n \cos. b) = + \tfrac{3}{4} n^2 \sin. 60^\circ$$
$$Q = \tfrac{1}{2} n^2 \sin. 60^\circ$$
$$= \tfrac{1}{2} n^2 \, 0{,}4330127$$

§. 135.

Aufgabe.

Die Coordinaten und die Fläche jedes Vielecks zu berechnen, wenn alle Seiten und Winkel gegeben sind, ausgenommen

I.

Eine Seite mit den anliegenden Winkeln

II.

Zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel.

Auflösung.

I. Fig. 1, 2, 3, 4.

Für die Grundlinie AY berechnet man die Coordinaten

Aa, Ab, Ac, Ad, Aw

Ba, Cb, Dc, Wd, Xw

nach §. 126. und hiermit den Flächeninhalt nach §. 129.

Um die fehlende Seite XY mit den anliegenden Winkeln X und Y zu berechnen, hat man

$$Yw = Aw - AY \text{ Fig. 1, 2.}$$

$$Yw = AY - Aw \text{ Fig. 3, 4.}$$

$$\text{tang. } XYw = \frac{Xw}{Yw}$$

und bezeichnet man diesen Winkel durch y, so ist

1) in Fig. 1, wo Xw positiv und Yw negativ ist

$$Y = AYX = 180° - y$$

2) in Fig. 2, wo Xw negativ und Yw negativ ist

$$Y = 180 + y$$

3) in Fig. 3, wo Xw positiv und Yw positiv ist

$$Y = y$$

4) in Fig. 4, wo Xw negativ und Yw positiv ist

$$Y = 360 - y$$

hiernach ist

$$XY = \sqrt{(\overline{Xw}^2 + \overline{Yw}^2)} = \text{sec. } y = \frac{Yw}{\sin, y}$$

und X = WXY ergibt sich aus der Summe der Polygonwinkel.

II.

Hier sucht man die Diagonale WY mit dem anliegenden Winkel AYW nach I, man nimmt XYW = Y — AYW, hiernach X aus der Summe der Polygonwinkel, und berechnet die Seiten WX, XY als Seiten des Triangels WYX.

§. 136.

Zu einem Beispiel des 1ten Falls §. 135. Fig. 5. seyen die Seiten AY, AB, BC, CW, WX mit den Winkeln A, B, C, W wie in §. 127. gegeben, wonach

$$\begin{array}{rll} AY = & 1717^\circ,52 & \text{Tabelle A} \\ - Aw = & \underline{1530,\ 71} & \text{Spalte VIII Zeile 4} \\ Yw = & 186^\circ,81 & \\ Xw = & 982,\ 43 & \text{Spalte VI 4} \\ \text{l. } Xw = & 2{,}9923016 + 10 & \\ - \text{l. } Yw = & \underline{2{,}2714001} & \\ \text{l. } y = & 10{,}7209015 = \text{l. tang. } 79^\circ,14' & \\ \text{und } Y = y = & 79^\circ,14\ (\text{§. 135. I. 3.}) & \\ \text{l. } Xw = & 2{,}9923016 + 10 & \\ - \text{l. sin. } y = & \underline{9{,}9922866} & \\ \text{l. } XY = & 3{,}0000150 = \text{l. } 1000^\circ,04 & \end{array}$$

wie in §. 127. und X = 240°

§. 137.

Nicht nur jede Diagonale, sondern auch die Entfernung je zweier Punkte im Umfang des Vielecks läßt sich nach dem Vorgehenden bestimmen, und das Ge-

suchte ergibt sich unmittelbar durch die Formeln §. 126. wenn unter den gegebenen Stücken nur ein Winkel und eine Seite, die man als Grundlinie betrachtet, vermißt wird. Die folgenden Aufgaben werden die vortheilhafte Anwendung derselben zu den Flächentheilungen ins Licht setzen.

§. 138.

Es sey das Vieleck Fig. 5 und 6, wie in §. 127. gegeben, und aus der Spitze X in zwei gleiche Stücke zu theilen. Zu diesem Ende subtrahirt man von der halben Flächengröße des Vielecks, das Dreieck

$$AXY = \frac{AY \,.\, Xw}{2}$$

Der Rest T ist die Größe des Dreiecks AXN, welches man mit dem vorigen zu verbinden hat, um das Vieleck zu theilen, und die Grundlinie AN ergibt sich aus

$$AN = \frac{2\,T}{AX \sin. XAN}$$

$$\sphericalangle\, XAN = A - XAY$$

$$\text{tang. } XAY = \frac{Xw}{Aw}$$

$$AX = Aw \sec. XAY$$

Berechnung.

AY = 1717,52

Xw = 982°,43 (Tab. A. V 4)

Aw = 1530,71 (VIII. 1.)

$$Q = 3969565{,}48$$

$$\triangle AXY = \frac{1717{,}52 \times 982{,}43}{2}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\, Q - \triangle AXY = 1141111{,}16$$

$$\begin{aligned}
\text{l. } Xw &= 2{,}9923016 + 10 \\
-\text{ l. } Aw &= 3{,}1848929 \\
\text{l. tang. } XAY &= 9{,}8074087 = \text{l. tang. } 32^\circ, 41', 34'' \\
\text{l. sec. } XAY &= 10{,}0749051 - 10 \\
+\text{ l. } Aw &= 3{,}1848929 \\
\text{l. } AX &= 3{,}2597980 = \text{l. } 1823^\circ{,}47
\end{aligned}$$

$$XAN = A - XAY = 80^\circ, 46 - 32^\circ, 41', 34''$$
$$= 48^\circ, 4', 26''$$

$$\begin{aligned}
\text{l. } 2\,T &= 6{,}3583579 \\
\text{compl. arithm. l. } AX &= 6{,}7411020 \\
\text{compl. arithm. l. sin. } XAN &= 0{,}1284229 \\
\text{l. } AN &= 3{,}2278828 = \text{l. } 1686{,}48
\end{aligned}$$

§. 139.

Hätte man dasselbe Vieleck in mehrere Stücke zu theilen, und die Theillinien aus der Spitze X zu ziehen, so würde man schicklicher die längere Seite AB, als Grundlinie der polygonometrischen Berechnung, aufnehmen, und in diesem Fall die Größe des Triangels AXY durch den Ausdruck $\frac{AY + XY \sin. Y}{2}$ erhalten.

§. 140.

Verlangt man Fig. 5. die Paralleltrapezien AoXY, WXop, CWpr, nebst dem Triangel BCr, als Vorbereitungen zur Abtheilung des Vielecks, so nimmt man

1) aus VI, Tabelle A, die Entfernungen der Parallelen, nämlich

Am = 2368, 90

Al = 1887, 52

Ak = 1700, 71

Ai = 982, 43

2) Aus VIII die Parallelen

Bm = 385,10

Cl = 3346,22

Wk = 2363,83

Xi = 1530,71

3) Die Abschnitte lr, kp, io aus den Analogien

Am : Bm = Al : lr

Am : Bm = Ak : kp

Am : Bm = Ai : io

wonach lr=306,85, kp=276,48, io=159,71 und

4) Cr = Cl — lr = 3039,37

Wp = Wk — kp = 2087,35

Xo = Xi — io = 1371 —

und da

5) lm = 481,38 (V)

kl = 186,81

ik = 718,28

Ai = 982,43, so folgt

6)	△ BCr	=	731545,96
	□ CWpr	=	478861,28
	□ WXop	=	1242031,81
	□ AoXY	=	1517127,35
			3969566,40 = Q

welches wegen Vernachlässigung der niedern Decimalstellen in den Berechnungslinien um 0,92 von dem Resultat der Tabelle abweicht.

§. 141.

Werden die Winkel eines Polygons durch die Abweichungen bestimmt, welche die Magnetnadel einer von 0 zu 360° über NWSO bezeichneten Boussole angibt, wenn die Ziellinie SN in die Richtungen der Seiten YA, AB, BC... gebracht wird, so entwickeln sich die Abweichungsbogen a, c, b... §. 126., indem man

I.

Die erste Abweichung A′ von jeder folgenden abzieht, wobei die Ostseite der Boussole gegen die Fläche des Polygons gekehrt wurde, und

II.

jede folgende von der 1ten Abweichung abzieht, wenn die Westseite der Boussole der Fläche des Polygons zugekehrt war.

Denn im ersten Fall läuft die Nadel, bei koncaven Winkeln, mit zunehmenden Zahlen über NWSO, bei konvexen Winkeln aber mit abnehmenden Zahlen über NOSW.

Die Differenz B′—A′ der beiden Abweichungen von YA und AB, Fig. 1 und 3, ist das Maaß des Winkels, welchen die Seite AB mit der verlängerten

Grundlinie macht, also auch des Bogens a, und eben so wie dieser, positiv oder negativ, je nachdem BAY koncav oder konvex ist.

Die Differenz $C' - B'$ der nächstfolgenden Abweichungen ist der Winkel, welcher die verlängerte Seite AB mit BC macht, daher $b = B' - A' + C' - B' = C' - A'$ u. s. w. Im 2ten Fall läuft die Nadel bei koncaven Winkeln mit abnehmenden Zahlen über NOSW, und bei konvexen Winkeln mit zunehmenden Zahlen über NWSO, wonach a mit $A' - B'$ wieder übereinstimmt, und

$$b = A' - B' + B' - C' = A' - C'$$
$$c = A' - D' \text{ u. s. w.}$$

§. 142.

Zu den obigen Bestimmungen darf es um so weniger an den sorgfältigsten Beobachtungen, welche die Unvollkommenheit des Werkzeugs zuläßt, fehlen, da sie der Verification aus ber Summe der Polygonwinkel nicht unterwürfig sind.

Die Differenzen $B' - A'$
$C' - B'$
$D' - C'$
$W' - D'$
$Y' - W'$
$A' - Y'$

machen die Summe der äußeren Polygonwinkel aus, und hierbei heben sich alle Fehler gegen einander auf.

§. 143.

Bei Zeichnungen mit Hülfe des Transporteurs, machen die Winkel eine Schwierigkeit, wenn sie zu nahe an den Rand der Tafel fallen; dieser auszuweichen kann man sich der äusseren Polygonwinkel mit Vortheil bedienen.

Wenn z. B. die Seiten und Winkel des Sechsecks, Fig. 5. wieder, wie in §. 127. gegeben sind, so summirt man zuerst die äußern Polygonwinkel, wie in folgenden, wo diese durch B^m, C^m, W^m u. s. w. angedeutet werden.

$B^m = 180° - 90° =$	$90°$		
$C^m = 180° - 20° =$	160		
	250	Summe	1
$W^m = 180° - 210° =$	-30		
	220	;	2
$X^m = 180° - 240° =$	-60		
	160	;	3
$Y^m = 180° - 79°,14' =$	$100,46$		
	$260,46$	;	4
$A^m = 180° - 80°,46' =$	$99,14$		
	$360,—$		

Man zieht Fig. 11. die Linie AB, schneidet sie beliebig in m durch eine senkrechte Linie, deren Endpunkte mit 90° oder 270° zu bezeichnen sind, je nachdem die Seite BC, Fig. 5. als zum 1ten oder 2ten Quadranten gehörig, angesehen wird.

Man trägt hiernach um den Mittelpunkt m, Fig. 11. die Winkel

amb = 90° als den ersten äußern Winkel
amc = 250° als die 1te Summe
amw = 220° ⸗ ⸗ 2te ⸗
amx = 160° ⸗ ⸗ 3te ⸗
amy = 260°,46′ ⸗ 4te ⸗

und hieraus in Fig. 6. die Linie AB parallel ma. An den Endpunkt B trägt man BC parallel mb; so fort CW parallel mc, an C

WX parallel mw, an W
XY parallel mx, an X

§. 144.

Markscheider⸗Aufgabe.

Zwei Oerter, X′ und Y sind durch mehrere gerade Linien mit einander verbunden, deren Längen, Elevationswinkel und Abweichungen von der Magnetebene gegeben sind, man verlangt die Höhe des Punkts X′ über der Horizontalebene von Y; ferner den Neigungswinkel, die Abweichung von der Magnetebene, die Länge und Horizontalprojection der Linie YX′. Es ist nämlich

YA′=154°,76	die Elevat.	14°,15′	die Abweich.	340°,—
A′B′=185,03	⸗	6°,45′	⸗	328°,45′
B′C′=250,19	die Depress.	2°,15′	⸗	288°,45′
C′W′=202,22	die Elevat.	8°,30	⸗	356°,45′
W′X′=105,49	die Depress.	5°,30	⸗	256°,30′

Berechnung.

Bezeichnet man durch YA, AB, CW, WX, Fig. 9. die Horizontalprojectionen der gegebenen Linien, und durch A′, B′, W′, X′ die Höhen ihrer Endpunkten über der Horizontalebene des Punktes Y, so ist

1.

$$YA = 154^\circ,76 \times \cos.\ 14^\circ,15' = 150^\circ\ -$$
$$AB = 185^\circ,03 \times \cos.\ 6^\circ,45' = 183^\circ,75$$
$$BC = 250^\circ,19 \times \cos.\ 2^\circ,15' = 250^\circ,-$$
$$CW = 202,22 \times \cos.\ 8^\circ,30' = 200^\circ,-$$
$$WX = 105,49 \times \cos.\ 5^\circ,30' = 105^\circ,-$$
$$A' = 154^\circ,76 \times \sin.\ 14^\circ,15 = 38^\circ,09$$
$$B' = 185^\circ,03 \times \sin.\ 6^\circ,45' + A' = 59^\circ,84$$
$$C' = -250^\circ,19 \times \sin.\ 2^\circ,15' + A' + B' = 50^\circ,02$$
$$W' = 202^\circ,22 \times \sin.\ 8^\circ,30' + A' + B' + C' = 79^\circ 91$$

und die gesuchte Höhe

$$X' = -105^\circ,49 \times \sin.\ 5^\circ,30' + A' + B' + C' + W' = 69^\circ 80$$

Betrachtet man hier die Westseite, als die anliegende Seite der Boussole, da die Fälle I und II. §. 141. für die gegenwärtige Anwendung gleichgültig sind, so ist

2.

$$a = 340^\circ - 328^\circ,45' = 11^\circ,15'$$
$$b = 340^\circ - 288^\circ,45' = 51^\circ,15'$$
$$c = 340^\circ - 356^\circ,45' = -16^\circ,45'$$
$$w = 340^\circ - 256^\circ,30' = 83^\circ,30$$

3.

$Ba = AB \sin. a = 35°,84$

$Cb = BC \sin. b = + Ba = 194°,97 + 35°,84$
$= 230°,81$

$Wc = CW \sin. c + Cb = -57°,64 + 230°,81$
$= 173°,17$

$Xw = WX \sin. w + Wc = 104°,32 + 173°,17$
$= 277°,49$

4.

$Aa = AB \cos. a = 180°,22$

$Ab = BC \cos. b + Aa = 156°,48 + 180°,22$
$= 336°,70$

$Ac = CW \cos. c + Ab = 191°,51 + 336°,70$
$= 528°,21$

$Aw = WX \cos. w + Ac = 11°,89 + 528°,21$
$= 540°,10$

$Yw = YA + Aw = 150°,— + 540°,10$
$= 690°,10$

5.

$\text{Tang. } y = \frac{Xw}{Yw} = \text{Tang. } 21°,54',18''$ (§. 135. I.)
$= Y$ (§. 135. I. 3)

und die Abweichung der Linie YX, welche um 21°,54'18" östlich von der Grundlinie YA liegt, beträgt

$340° - 21°,54',18'' = 318°,5',42''$ oder beinahe $318°\frac{1}{10}$, und hiernach

6.

die gesuchte Horizontalprojection

$YX = \frac{Xw}{\sin. y} = 743°,79$

die gesuchte Elevation derselben

$$\text{Tang. } X'YX = \frac{X'}{YX} = \text{Tang. } 5°,21'41''$$

und die Länge von

$$X'Y = \sqrt{(X'^2 + \overline{XY}^2)} = \frac{X}{\sin. X'YX} = 747°,06$$

§. 145.

Konstructions-Aufgabe.

Ein gegebenes Dreiecks-Netz, welches in einer Ebene liegt, an eine gegebene Mittagslinie zu binden.

Auflösung Fig. 10.

Es sey a = 32°, 50', 47'' der Winkel, welchen die Mittagslinie NS mit der Seite AB des Dreiecks ABC macht, ferner

ABC = 67°,51',14''	AB = 2442°,90
BCD = 271°,34',56''	BC = 2065°,68
CDE = 59°,24',53''	CD = 2080°,33
DEF = 117°,11',59''	DE = 2295°,29
EFG = 206°, 3',45''	EF = 2631°,93
FGH = 87°, 6',—	FG = 2420°,93
GHI = 186°, 6',—	GH = 2529°,11
HIK = 90°,59',—	HI = 2489°,79
IKL = 170°, 9',42''	IK = 2340°,60
KLA = 52°,21',59''	KL = 2621°,13
	LA = 2653°,04

und es sey NAW der 1te Quadrant für die Abweichungsbogen a, b, c u. s. w. §. 126., so ist

1.

a = 32°, 50′, 47″
b = 144°, 59′, 33″
c = 53°, 24′, 37″
d = 173°, 59′, 44″
e = 236°, 47′, 45″
f = 210°, 44′, —
g = 303°, 38′, —
h = 297°, 32′, —
i = 386°, 33′, —
k = 396°, 23′, 18″
l = 524°, 1′, 19″

2.

AB sin. a	=	1325°, 10	= Ba
BC sin. b	=	1185, 05	
		2510, 15	= Cb
CD sin. c	=	1670, 35	
		4180, 50	= Dc
DE sin. d	=	240, 10	
		4420, 60	= Ed
EF sin. e	=	— 2202, 20	
		2218, 40	= Fe
FG sin. f	=	— 1237, 20	
		981, 20	= Gf

981, 20
GH sin. g = — 2104, 90
— 1123, 70 = Hg
HI sin. h = — 2207, 80
— 3331, 50 = Ih
IK sin. i = + 1046, 20
— 2285, 30 = KI
KL sin. k = + 1555, —
— 730, 30 = Lk
LA sin. l = + 730, 30
0, 0

3.

AB cos. a = 2052°,35 = Aa
BC cos. b = — 1691, 95
360, 40 = Ab
CD cos. c = + 1240, 05
1600, 45 = Ac
DE cos. d = — 2282, 70
— 682, 25 = Ad
EF cos. e = — 1441, 31
— 2123, 56 = Ae
FG cos. f = — 2080, 92
— 4204, 48 = Af
GH cos. g = + 1400, 26
— 2804, 22 = Ag
HI cos. h = + 1150, 94
— 1753, 28 = Ah
IK cos. i = + 2093, 77
+ 440, 49 = Ai

$$
\begin{array}{rl}
 & 440,\ 49 \\
KL\ \cos.\ k = + & \underline{2110,\ 05} \\
 & 2550,\ 54 = Ak \\
LA\ \cos.\ l = - & \underline{2550,\ 54} \\
 & 0,\ \ 0
\end{array}
$$

4.

Durch die berechneten Coordinaten wird nun das Netz nach §. 129. aufgetragen, und jeder Endpunkt desselben mit der gegebenen Mittagslinie verbunden.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Tafel.	Figur.	
I.	1—8.	Allgemeine Formeln, die Theilung eines Vierecks zu berechnen, wenn die Theillinien parallel mit der Grundlinie, oder nach einer anders gegebenen Richtung gezogen werden. §. 1—8.
	9. 10.	Die Theillinien eines Vielecks parallel mit mehreren Seiten des Umfangs zu ziehen. §. 9. 10.
	11.12.	Vortheilhaftes Verfahren bei der Berechnung der Wurzelgrößen. §. 12.
	13.15.	Die Theillinien eines Vierecks parallel mit den Seiten anzulegen. §. 13. 14.
	16.17.	Die Theillinien einer vier- oder mehrseitigen Figur aus gegebenen Punkten des Umfangs zu ziehen. §. 15. 17. 18.
		Abgekürzte Berechnung der Vierecke. §. 16.
	18.20.	Ein Viereck durch zwei gerade Linien in vier beliebige Stücke zu theilen. §. 19—23.

Zweiter Abschnitt.

Beispiele zur Anwendung des Vorgehenden.

Tafel.	Figur.	
I.	21.	Die Grundlinie einer Figur ist rechtwinklicht mit der einen, und schief mit der andern Seite verbunden, man sucht die Einschnitte der Parallele, welche ein gegebenes Flächenstück davon abschneide. §. 24.
	22.	Ein Viereck ist in gleiche Theile zu theilen, so daß die Theillinie die beiden längeren Seiten schneide. §. 25.
		Abkürzung des Verfahrens in besondern Fällen der vorgehenden Theilung. §. 26.
	23.	Verfahren nach Ozanam bei dieser Theilung. §. 27.
	24.	Ein vierseitiges Feld durch eine Parallele der Grundlinie zu theilen. §. 28.
	25.26.	Ein fünf- oder mehrseitiges Feld seiner Länge nach zu theilen. §. 29. 30.
	27.	Ein Feld in mehrere gleiche oder ungleiche Theile zu theilen. §. 31.
	28.	Die Theilung aus einem gegebenen Punkt des Umfangs. §. 32. 34.
	17.	Die Theilung aus mehreren Punkten einer Seite. §. 35.
II.	29.	Die Theilung eines Feldes in mehrere Stücke, von verschiedener Lage und Größe. §. 36.

Tafel.	Figur.	
II.	30.	Die Theilung eines Feldes in mehrere gleiche Theile, wozu die Theillinien aus gleichen Abschnitten der oberen oder der Grundlinie gegenüber liegenden Seite gezogen werden. §. 37.
	31.	Die Abtheilung eines Grundstücks in 20 Parcellen nach den schicklichsten Richtungen. §. 38.
	32.	Die Theillinien parallel mit der oberen Seite der Figur zu ziehen. §. 39. 40.
		Symmetrie der Theilstücke. §. 41.
II. I.	33. 24.	Ein Grundstück mit durchziehendem Feldweg wird unter mehrere Interessenten vertheilt, so daß jeder den schicklichsten Antheil, ohne Nachtheil des andern, erhält. §. 42. 43.
III.	34.35.	Symmetrische Theilung eines Grundstücks in mehrere Parcellen. §. 45. 46.
	36.37.	Abtheilung eines bogenförmigen Wiesenstücks. §. 47.
I.	9.	Die Theillinien eines bogenförmigen Feldes parallel mit dem Umfang anzulegen. §. 48. 49
	18.	Ein Viereck, welches aus zwei Stücken besteht, durch eine gerade Linie in vier beliebige Stücke zu theilen. §. 50.
III.	38.39.	Vier in einander greifende Schlüsselstücke durch zwei gerade Linien in eben soviel Vierecke zu verwandeln. §. 51.
	40.42.	Kürzeres Verfahren, vermittelst drei gerader Linien, bei der vorgehenden Abtheilung. §. 52.

Tafel. Figur.

IV. 43. Abtheilung eines Grundstücks in mehrere Parcellen nach verschiedenen Richtungen, mit einem durchzuführenden Feldweg. §. 53.

44. Vorbereitungen zur Theilung eines Vielecks. §. 55.

45. 47. Veränderung der Theillinien. §. 56.

48. Die Theilung eines Vierecks aus den Mitten zweier gegenüber liegenden Seiten. §. 57.

49. Anwendung des vorgehenden Verfahrens zur Abtheilung eines länglichen Vielecks. §. 58.

50. 51. Zweckmäßigeres Verfahren bei der vorgehenden Abtheilung. §. 59. 60.

52. 54. Ueber die Theilung der Dreiecke. §. 61. 62.

55. 56. Ueber die Theilung der Figuren aus einem Punkt innerhalb des Umfangs. §. 63.

IV. 57. Die Theillinie durch einen gegebenen Punkt innerhalb der Figur zu führen. §. 64.

57* Die Theilung eines Dreiecks aus einem gegebenen Punkt ausserhalb desselben. §. 65.

Dritter Abschnitt.

Gleichungen für die Beziehung der Coordinaten eines Punktes auf zweierlei Abscissenlinien.

Tafel. Figur.

V. 1—3. Einfache Beziehung, wenn die gegebene Ordinate auf dem Durchschnittspunkt der Abscissenlinien steht, oder mit der Seite des Neigungsdreiecks zusammenfällt. §. 66; 69.

Tafel. Figur.
V. 3—4. Allgemeine Beziehung der Coordinaten, wenn der Punkt ausserhalb oder innerhalb des Neigungsdreiecks liegt. §. 70—77.

Vierter Abschnitt.

Beispiele zur Anwendung der vorgehenden Gleichungen.

Tafel. Figur.
V. 1. Veränderung der Coordinaten.
1) wenn die Abscissenlinie sich um ihren Durchschnittspunkt mit der gegebenen Ordinate, als um ihren Mittelpunkt, bewegt. §. 78. 79.
2) wenn die gegebenen Ordinate mit einer Seite des Neigungsdreiecks zusammenfällt. §. 80. 81.
5. 6. Negative Veränderungen der Coordinaten. §. 82—85.
V. 7. Die Coordinaten eines Dreiecks von einer Seite auf die andere zu tragen. §. 86.
8. Die Coordinaten eines Trapez auf eine anliegende Seite zu reduziren. §. 87.
9. 10. Die Coordinaten jedes Vierecks von der Grundlinie auf eine der anliegenden Seiten zu übertragen;
1) wenn einer der anliegenden Winkel spitz und der andere stumpf ist. §. 88.
2) wenn beide spitz sind. §. 89.

Tafel.	Figur.	
V.	11.	Die Coordinaten eines Trapez von der Grundlinie auf die gegenüberliegende Seite zu reduziren. §. 90.
	12.	Die Coordinaten jedes Vierecks wie im Vorgehenden zu reduziren. §. 91.
	13.	Die Coordinaten eines Trapez auf die Theillinien desselben zu übertragen. §. 92.
		Die Coordinaten jedes Vierecks auf die Theillinien zu übertragen.
	14.	1) wenn die Winkel an der Grundlinie stumpf sind. §. 93.
	15.	2) wenn sie spitz sind. §. 94.
VI.	16.	3) wenn einer spitz und der andere stumpf ist. §. 95.
	17.18.	Die Endpunkte einer gebrochenen Linie mit einer zweiten Abscissenlinie zu verbinden. §. 96. 97.
IV.	44.	Veränderung der Coordinaten eines Vielecks, als Vorbereitung zur Abtheilung desselben. §. 98.
VI.	19.	Ein Weg anzulegen, welcher ein Grundstück nach jedem beliebigen Verhältniß theile. §. 99.
	20.	Vorbereitungen zur Abtheilung einer Länderei mit einem durchzuführenden Weg. §. 100.
	21.22.	Veranlassung zu verschiedenen Verainungen der Parcellen und zu gebrochenen Theillinien mit der Anweisung, diese wieder in gerade Linien übergehen zu lassen. §. 101.

Tafel. Figur.

VI. 23. Veränderung der Coordinaten zur Anwendung der Formel §. 1. um die Theillinien parallel mit jeder Seite der Figur zu ziehen. §. 102.

24.25. Die kürzeste Theillinie eines Vierecks in jedem Verhältniß der Theilung zu berechnen. §. 103 — 105.

Fünfter Abschnitt.

Die Kreuzscheibe.

Nutzen dieses Werkzeugs. §. 106.

VII. 26. Einrichtung desselben in die gerade Linie zweier Punkte. §. 107. 108.

27. Berichtigung desselben. §. 109.

Verification der Coordinaten eines Vierecks. §. 110.

Bestimmung der Ordinaten durch die Abscissen. §. 111.

28. Folgen der Fehler, wenn das Werkzeug nicht genau in der Abscissenlinie aufgestellt wird. §. 112.

29. Betrachtung der Fälle, worin die Vermessung der Ordinaten ihrer Berechnung vorzuziehen ist, nebst einer tabellarischen Uebersicht derselben. §. 113. 114.

30.31. Folgen der Fehler, die im Visiren begangen werden. §. 115 — 120.

Tafel. Figur.
VII. 32.33. Vereinigte Folgen der Fehler, die aus einem irrigen Stand- und Zielpunkt herrühren. §. 121.
34. Berichtigung des Standpunkts. §. 122.
35. Die vortheilhafte Anwendung quadratischer Differenztafeln bei Flurvermessungen. §. 122.
36.37. Ueber die Verification der Vierecke, die aus dem Umfang und der Diagonale bestimmt werden. §. 123 — 125.

Sechster Abschnitt.

Polygonometrische Methode, den Flächeninhalt und die Coordinaten zur Konstruction der Figuren aus den gegebenen Seiten und Winkeln zu berechnen.

Tafel. Figur.
VIII. 1, 3. Allgemeine Formeln. §. 126.
5. Die Anwendung derselben, durch die Berechnung eines Sechsecks erläutert. §. 127.
Die Konstruction der Vielecke. §. 128
Zweite Bestimmungsart des Flächeninhalts. §. 129.
Die Verification. §. 130.
3. Zweites Beispiel der Berechnung mit negativen Abweichungsbogen. §. 131.
2. 7. Drittes Beispiel in der Berechnung eines Siebenecks. §. 132.

Tafel.	Figur.	
VIII.	2. 7.	Fernere Erläuterung durch die Berechnung eines Quadrats und gleichseitigen Dreiecks. §. 133. 134.
	1—4.	Die Berechnung der Vielecke, wenn unter den gegebenen Stücken eine Seite mit den anliegenden Winkeln, oder ein Winkel mit den anliegenden Seiten fehlt. §. 135 ; 137.
	5. 6.	Polygonometrische Theilungen. §. 138 ; 140. Entwickelung der Abweichungsbogen, wenn die Winkel durch die Abweichungen der Seiten von der magnetischen Mittagslinie gegeben sind. §. 141.
6.	11.	Ein vortheilhaftes Verfahren zum Auftrag der Polygonwinkel mit Hülfe des Transporteurs. §. 143.
	9.	Markscheider-Aufgabe. Die Entfernung zweier Punkte, ihren Horizontalabstand, den Unterschied ihrer Höhen und ihre Abweichung von der Mittagslinie zu bestimmen. §. 144.
	10.	Ein gegebenes Dreiecksnetz an eine gegebene Mittagslinie zu binden. §. 145.

Druck und Papier von C. L. Brede in Offenbach.

Tafel A.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X		XI.	
2400	80°,46′	99°,14′	+ — 80, 46	+ 2368,90	+ 2368,90	— 385, 10	— 385, 10	— 192, 55	□°	□′	□° 456131	□′ 69
3000	170, 46	189, 14	— — 9, 14	— 481, 38	+ 1887,52	— 2961,12	— 3346,22	— 1865,66	898091	41		
1000	190, 46	349, 14	— + 10, 46	— 186, 81	+ 1700,71	+ 982, 39	— 2363,83	— 2855,02	533346	29		
1100	400, 46	319, 14	— + 40, 46	— 718, 28	+ 982, 43	+ 833, 12	— 1530,71	— 1947,27	1398685	09		
1000,04	640, 46	259, 14	— — 79, 14	— 982, 43	O	— 186, 81	— 1717,52 Basis	— 1624,11	1595574	38		

+ 4425697 ; 17 , 456131 ; 69
— 456131 ; 69

Inhalt der Figur 3969565 ; 48

Siehe Erklärung der Tafel §. 127.

Tafel B.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.		XI.	
1100	240°	— 60°	— + 60	— 952,62	— 952,62	+ 550	+ 550	+ 275	□°	□′	□° 261970	□′ 50
1000	450	— 90	— 90	— 1000	— 1952,62	0	+ 550	+ 550			550000	
3000	470	70	+ + 70	+ 2819, 07	+ 866,45	+ 1026,06	+ 1576,06	+ 1063,03	2996755	98		
2400	560	160	+ — 20	+ 820, 84	+ 1687, 29	— 2255, 25	— 679,19	+ 448, 44	368097	49		
1717,52	640,46	259,14	— — 79, 14	— 1687, 29	0	— 320, 85	— 1000,04 Basis	— 839, 62	1416682	43		

\+ 4781535 ; 90 , 811970 ; 50
— 811970 ; 50

Inhalt der Figur 3969565 ; 40

Siehe Erklärung der Tafel §. 127.

T a f e l C.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.		XI.	
1500	142°,30′	37°,30′	+ + 37°,30′	+ 913, 14	+ 913, 14	+ 1190,03	+ 1190,03	+ 595,015	□° 543332	□′	□°	□′
1700	166, 45	193, 15	— — 13, 15	— 389, 64	+ 523, 5	— 1654,74	— 464, 71	+ 362, 66			141306	84
1800	410, 55	129, 5	+ — 50, 55	+ 1397,21	+ 1920,71	— 1134,81	— 1599,52	— 1032,115			1442081	40
1600	445, 55	274, 5	— + 85, 55	— 1595,93	+ 324, 78	+ 113, 94	— 1485,58	— 1542,55	2461801	82		
1500	688, —	212, —	— — 32, —	— 794, 88	— 470, 10	— 1272,07	— 2757,65	— 2121,615	1686429	33		
2261,06	708, —	372, —	+ + 12, —	+ 470, 1	0	+ 2211,65	— 546, — Basis	— 1651,825			776522	93

\+ 4691563 ; 15 , 2359911 ; 17

— 2359911 ; 17

Inhalt der Figur 2331651 ; 98

Siehe Erklärung der Tafel §. 127.

Verbesserungen.

Auf der Kupfertafel I. Fig. 9. ist der von A′ auf die Grundlinie IH gezogene Perpendickel unten mit a, und der von C auf die Grundlinie FE gezogene Perpendickel unten mit r zu bezeichnen.

Auf der Kupfertafel V. Fig. 12. fehlt die Seite BC.

Fig. 14. ist die Linie rd bis zum Durchschnitt d der Linie qt hinaufzurücken.

Auf der Kupfertafel VI. Fig. 22. ist der erste Theilpunkt der Linie AN mit k‴ und der Linie BF mit k″ zu bezeichnen.

S. 6. Z. 3. sechsten Abschnitt für vierten Abschnitt.

„ 8. „ 4. ist $\frac{\pm a \mp \sqrt{(a^2 \mp 2sq)}}{2}$ für $\frac{a - \sqrt{(a^2 - 2sq)}}{2}$ zu setzen.

S. 22. Z. 8. DF = a für DF a

„ 25. „ 7 von unten, Abscisse für Abrisse

„ 68. „ 11. FH für FA und HC für AC

„ 90. „ 3 von unten, AM für AB

„ 108. „ 3 u. 4. längere für Länge
6. EGF für LGF

„ 110. §. 63. Z. 4. Figur ziehen, anstatt Figur zu ziehen.
§. 64. „ 3. ABCD für ABST

„ 111. Z. 16. HET für HEF

„ 113. „ 15. EF für CF

„ 132. „ 4. EC für Ee

„ 138. „ 9. AMPD : ONBC für ABMP : ONCD.
„ 10. AMPD für ABMP

„ 141 letzte Z. $\frac{1}{2}$ für $\frac{1}{3}$

„ 153 §. 103. Z. 3. DBE für DBC

„ 155 §. 105. Z. 2. CDGH für GADC

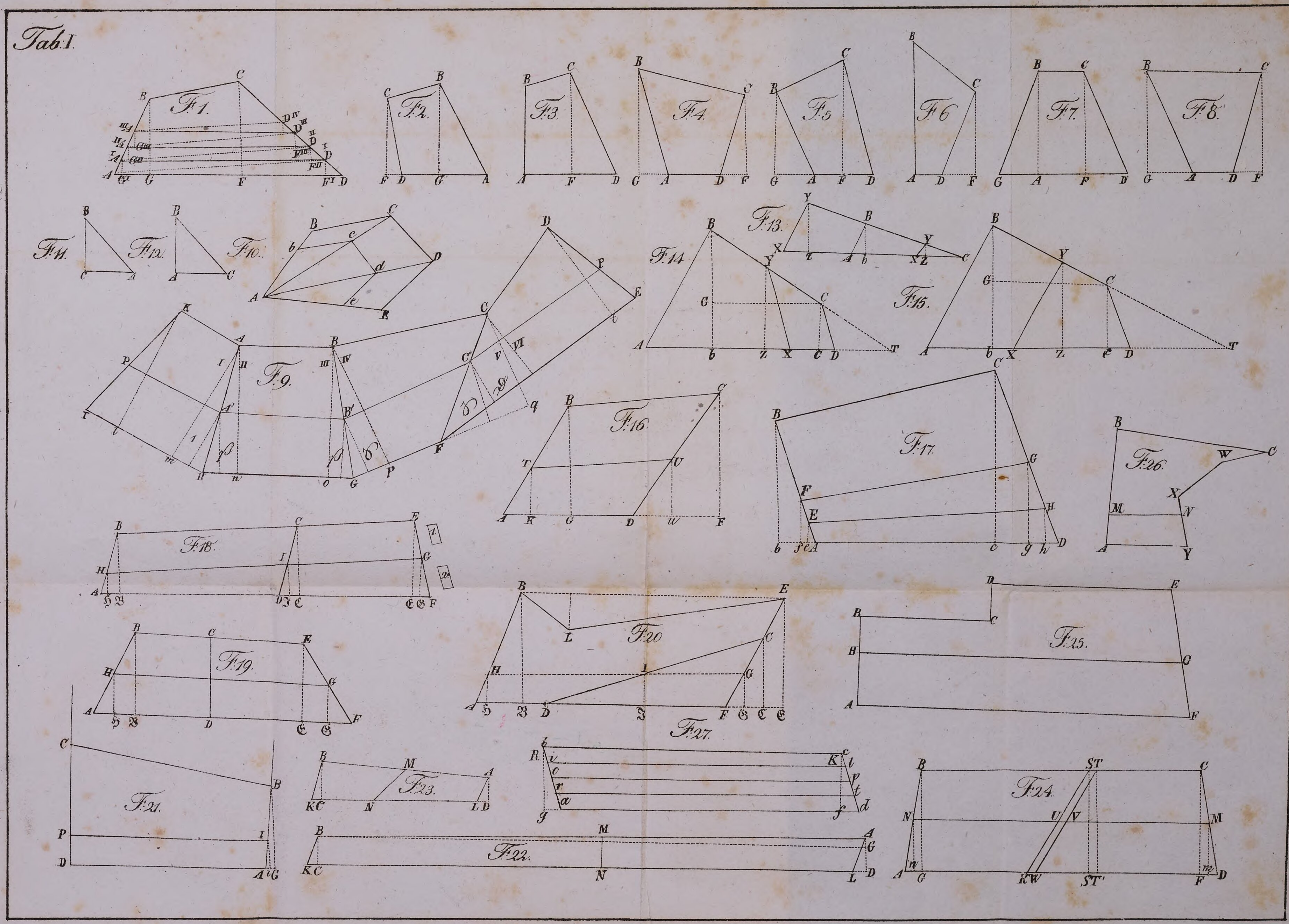
„ 156. Z. 12. DH für DA

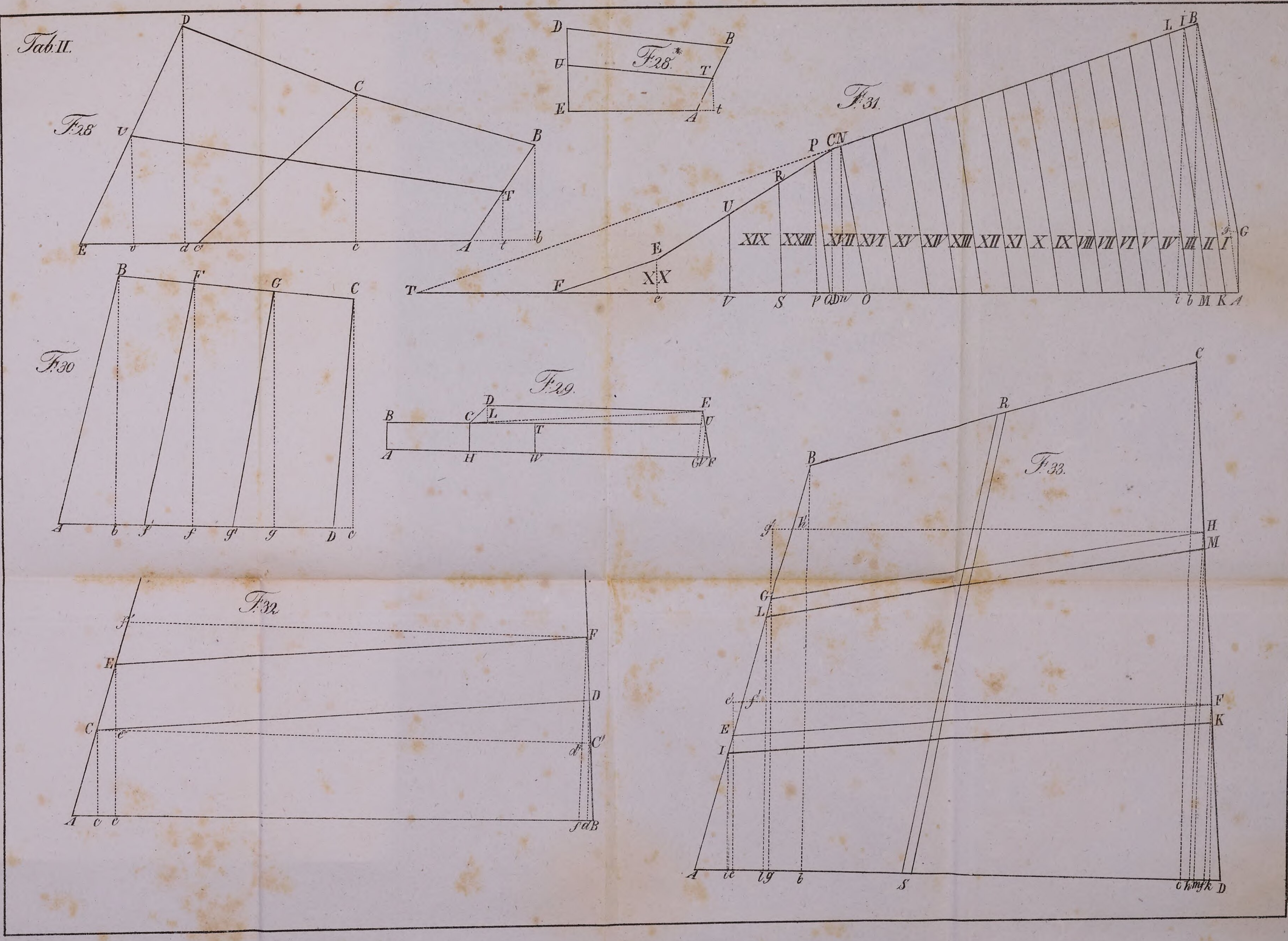
„ 161. §. 112. Z. 2. AE für Ae

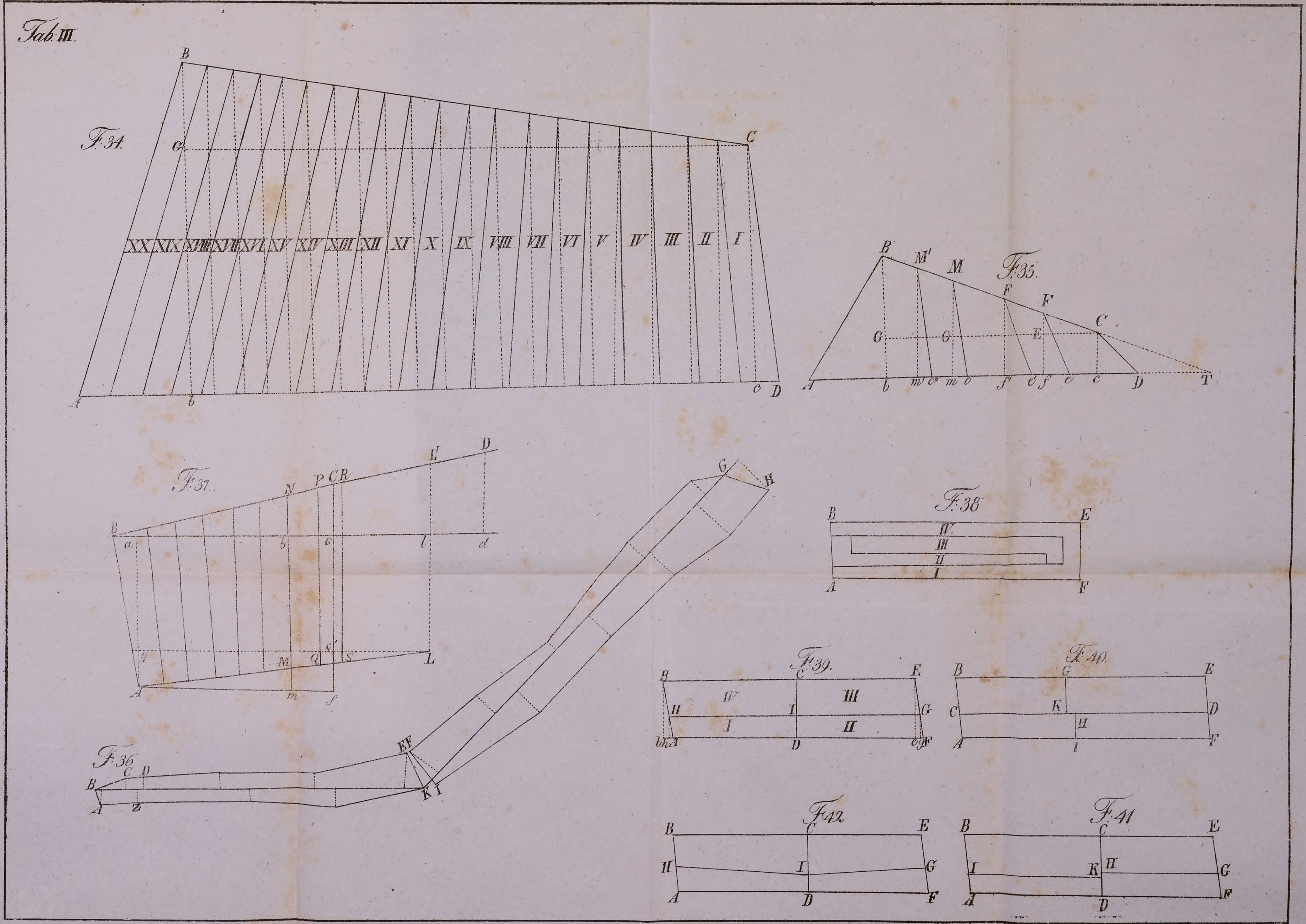
„ 162. Z. 1. x + ny für x = ny

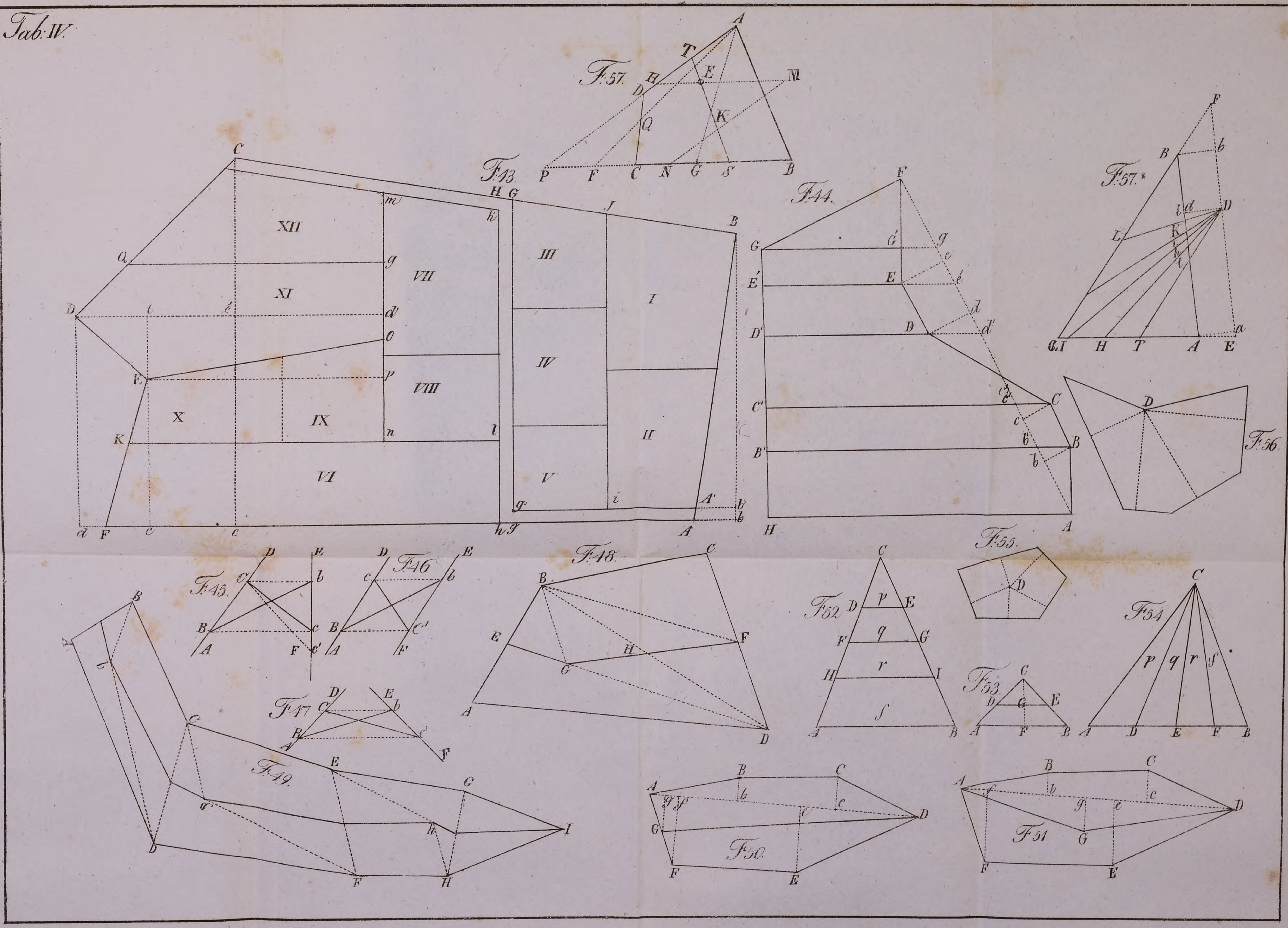
„ 169. Z. 8. Fig. 133. für Fig. 132.

In dem Inhaltsverzeichniß, Tafel VI. 19. Einen Weg für Ein Weg.

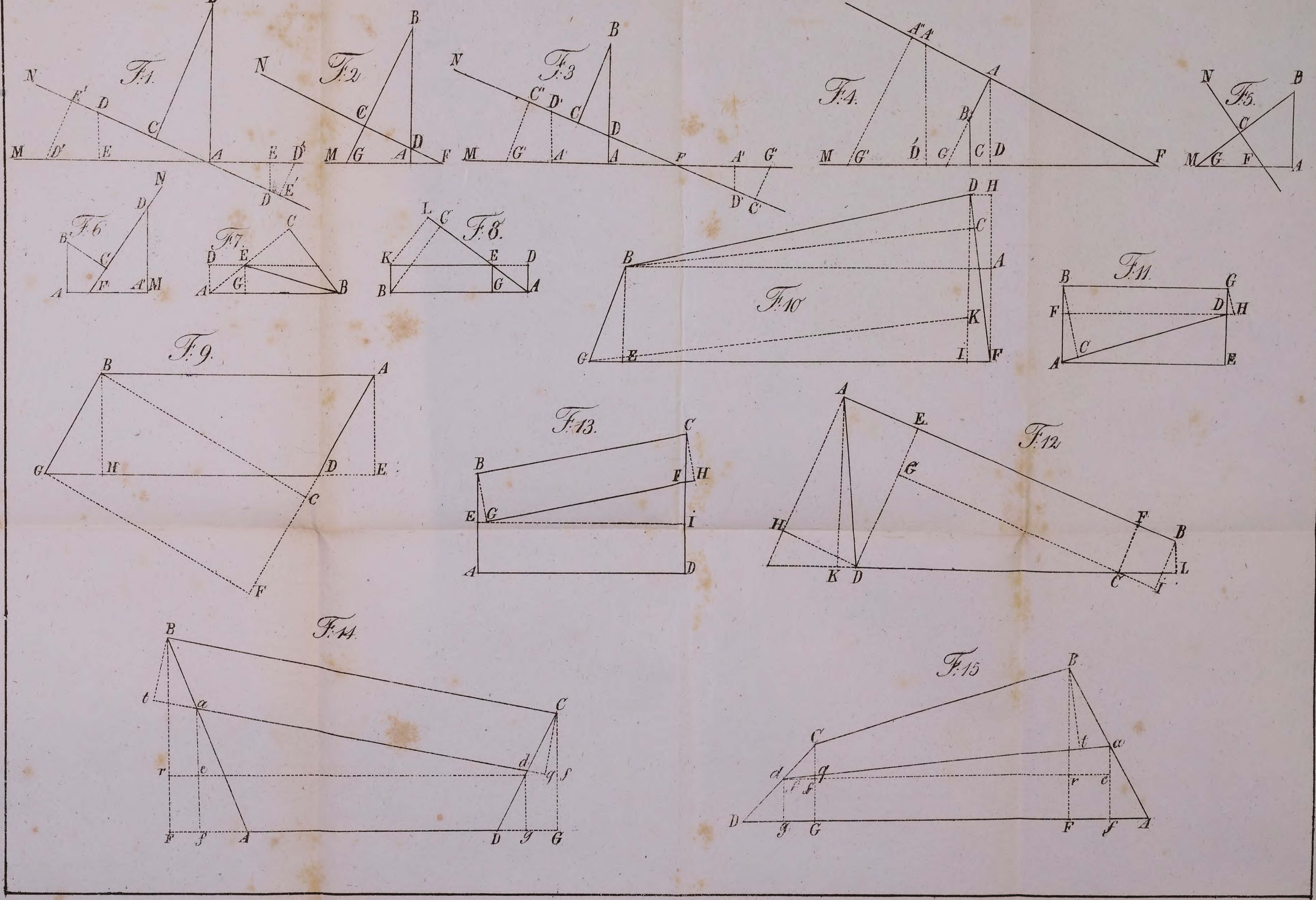

Tab. I.
F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
F. 15.
F. 16.
F. 17.
F. 18.
F. 19.
F. 20.
F. 21.
F. 22.
F. 23.
F. 24.
F. 25.
F. 26.
F. 27.


Tab. II.
F. 28
F. 28*
F. 29
F. 30
F. 31
F. 32
F. 33

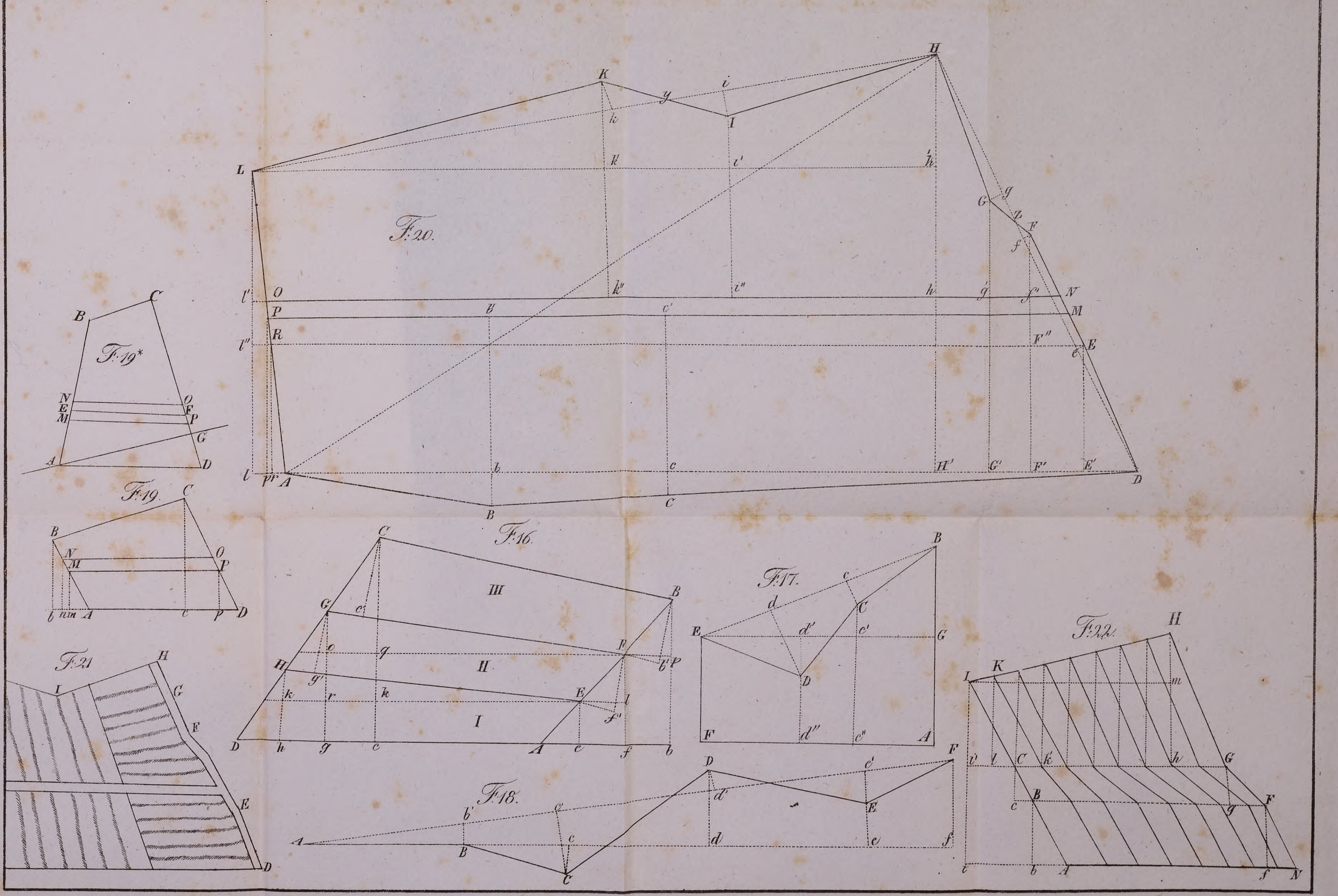

Tab. III.
F. 34.
B
C
XX XIX XVIII XVII XVI XV XIV XIII XII XI X IX VIII VII VI V IV III II I
A b c D
F. 35.
B M' M F F C
G O E
A b m' o' m o f' e' f e c D T
F. 37.
B P C R L' D
a b b' l d
M Q S L
A m f
F. 36.
B C D
A
E F
K I
G H
F. 38
B E
IV
III
II
I
A F
F. 39.
B C E
IV III
H I G
I II
A D F
F. 40.
B G E
C K D
H
A I F
F. 42
B C E
H I G
A D F
F. 41
B C E
I K H G
A D F

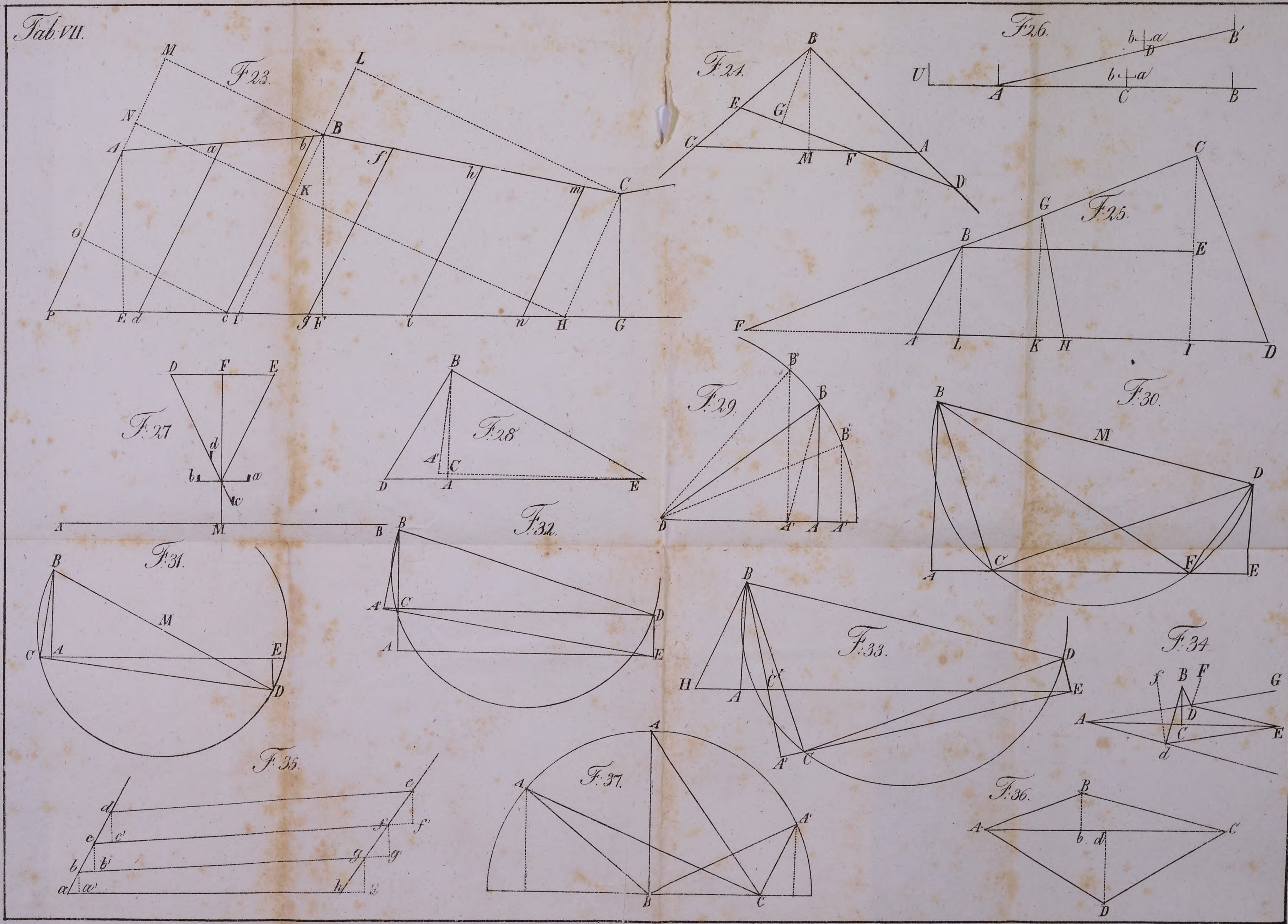

Tab: IV.
F.57.
F.43.
F.44.
F.57.*
F.56.
F.45.
F.46.
F.47.
F.48.
F.49.
F.52.
F.55.
F.53.
F.54.
F.50.
F.51.

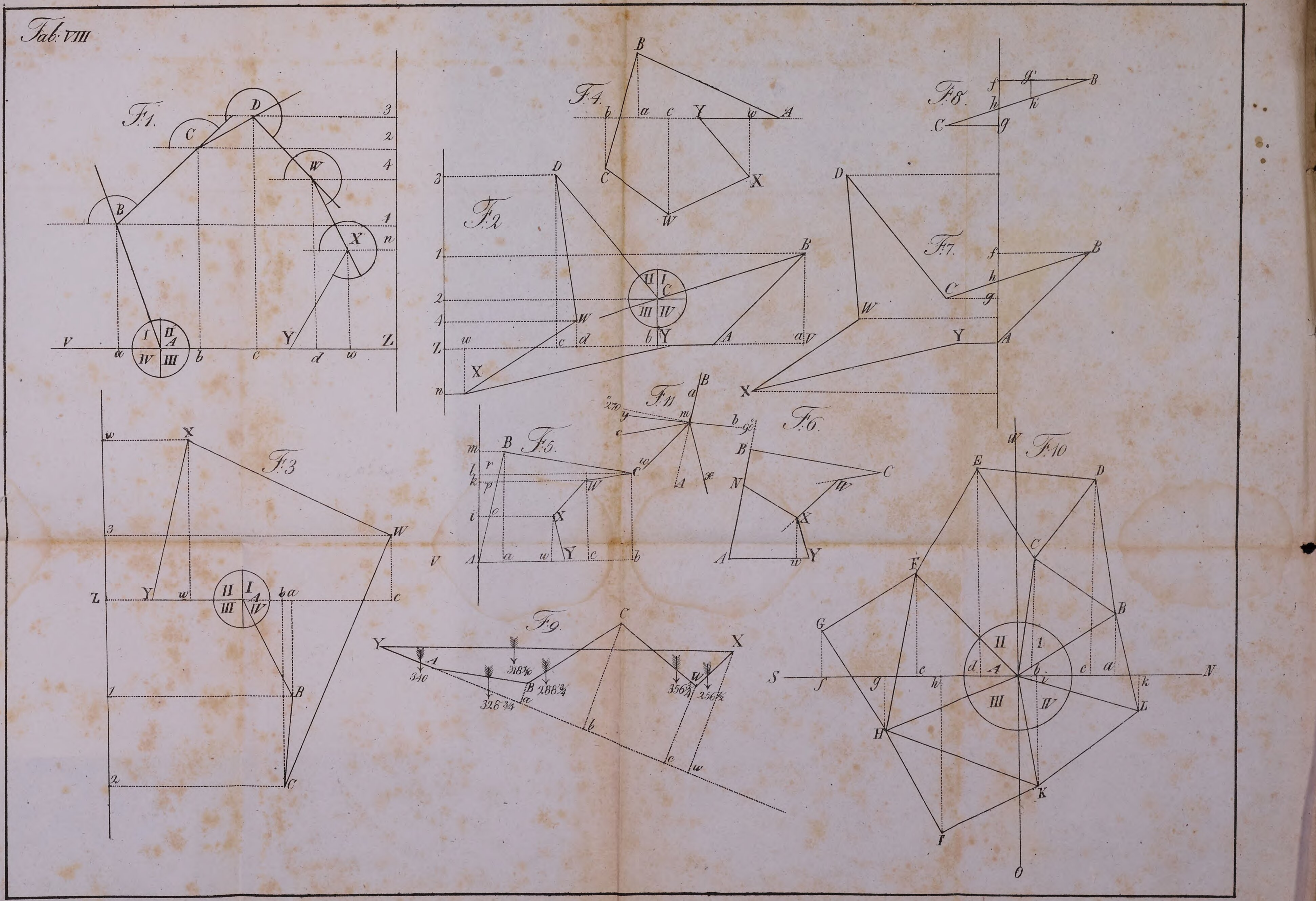
Tab. V.



Tab VI.




Tab. VII.
F. 23.
F. 24.
F. 25.
F. 26.
F. 27.
F. 28.
F. 29.
F. 30.
F. 31.
F. 32.
F. 33.
F. 34.
F. 35.
F. 36.
F. 37.


Tab: VIII
F. 1.
F. 2
F. 3
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10
F. 11

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bleibtreu, Ludwig

Theilungslehre oder ausführliche Anleitung jede Grundfläche auf die zweckmä
ßigste Art für die Benutzung und nach allen Verhältnissen geometrisch zu
theilen nebst einigen andern Beiträgen zur praktischen Geometrie

Frankfurt am Main 1819

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 24
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346031-9